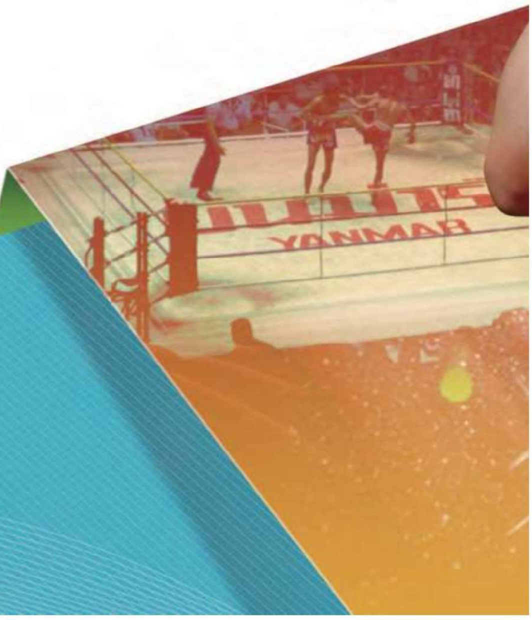
6 動量與動量守恆律

6-1 動量與衝量

6-2 質心運動

6-3 動量守恆律

6-4 角動量



由牛頓第二運動定律的等價描述裡，將可得出重要的動量與衝量概念。此外，從單質點到多質點系統的質心觀念，能看出煙火爆炸後燦爛的火花軌跡仍有一定的規則，並可建立起第一個重要的運動守恆律。

我們已經發現了具體物體的可靠原理，它不是來自於我們觀念上的偏見，而是來自於理性的照耀；現在我們必須考慮它們是否能解釋所有的自然現象。 —— 笛卡兒（1596 ～ 1650）

We have discovered the reliable principles of the specific subjects. They came from the light of reason rather than our prejudice of the idea. Now we must consider whether they can explain all of the other natural phenomena. —— Descartes

牛頓第二運動定律以物體所受外力來解釋質點運動改變的原因，本章將提出物體的「運動量」(quantity of motion) 或「動量」(momentum) 的概念，進一步來體驗和發現牛頓運動定律的豐富內涵；並了解慣性定律的另一種描述方法——單質點的動量守恆，然後將其推廣至多質點系統的動量守恆。這個守恆律在引入「質心」的觀念後，將簡化了受力甚為複雜的多質點系統的運動描述。

$\vec{F}=m\vec{a}$

$N=kg\cdot m/s^2$

6-1 動量與衝量

一、動　量 $\vec{p}$

改变物体運动狀態的難易程度

若兩顆質量相同的棒球，分別以較快和較慢的速度打到薄木片上，顯然較快的球會造成較大的破壞（下頁圖 6-1），也可以說，物體的運動量量值與物體運動的快慢有關係。倘若速度相同的兩個物體，其運動量是否相同？這可由速度相同的自行車與卡車不慎撞到樹，對樹的傷害看出（下頁圖 6-2）。質量愈大的物體，具有較大的運動量。因此，物體的運動量和物體的質量及當時的瞬時速度皆有關。$\boxed{定義}$運動物體的質量 m 與速度 $\vec{v}$ 的乘積

1. 动量 (not 实验) (not 理論推導)

①向量 $\vec{p} \parallel \vec{v}$

②單位：$kg\cdot m/s$

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{v}} \tag{6.1}$$

為此運動物體的**動量**。若物體在二維空間運動，可以分量形式表示，則在水平與垂直方向上的動量分別為

分解

$$p_x=mv_x，p_y=mv_y \tag{6.2}$$

動量的單位在 SI 制中為公斤・公尺／秒或 kg・m／s。動量是向量，其方向為速度的方向。

~~$p=mv$~~

~~$\Delta p=m\Delta v$~~

2. 动量变化 $\Delta\vec{p}=\vec{P_2}-\vec{P_1}$

$=m_2\vec{v_2}-m_1\vec{v_1}$

↓质量不变 $m_1=m_2=m$

$=m(\vec{v_2}-\vec{v_1})$

$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}}$ …质量不变 … 高中

$kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot s$

3. 物体受力的动量变化　4. $\boxed{定义}$：衝量 $\vec{J}$

3. 物体受力的动量变化

$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$

合力

4. 定义：衝量 $\vec{J}$

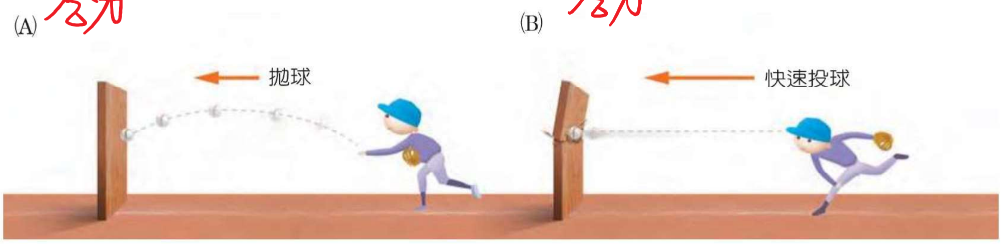
$\vec{J} = \vec{F}\Delta t$

任意力

合力

① 向量：$\vec{J} // \vec{F}$

② 單位：$N\cdot s = kg\cdot m/s$



▲ 圖 6-1　質量相同、速度不同的棒球，具有不同的動量：(A)動量較小。(B)動量較大。

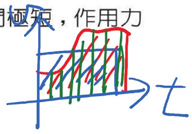
▲ 圖 6-2　速度相同、質量不同的兩物體，具有不同的動量：(A)動量較小。(B)動量較大。

二、衝　量

翰林版基礎物理(二) B上冊所提到的作用力，例如重力、張力、正向力等，大都屬於定力，且作用效應一直持續著。如果作用力僅發生在很短的時間內，稱此種力為**衝力**（impulsive force）或衝擊力。

例如，揮拍擊中網球（圖 6-3），球拍與網球的接觸時間極短，其作用力量值與時間的關係如下頁圖 6-4 所示，則球拍與網球的作用力 F 便是一種衝力。

▲ 圖 6-3　打擊網球時，作用時間極短，作用力為衝力。



$\vec{F}_{合}\cdot\Delta t$

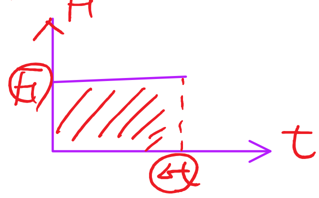
||

5. $\boxed{\vec{J}_{合} = \Delta\vec{p}}$ 衝量—動量定理

$\vec{J}_{合} // \Delta\vec{p} // \vec{F}_{合} // \vec{a} // \Delta\vec{v}$

$\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \vec{F}_1\Delta t_1 + \vec{F}_2\Delta t_2 + \vec{F}_3\Delta t_3 + \cdots$

定力

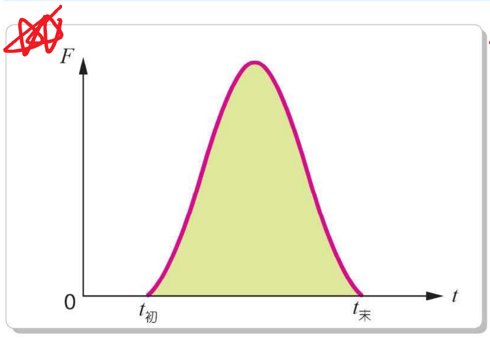


6.若变力⋯⋯畫 $\vec{F}$-t 图

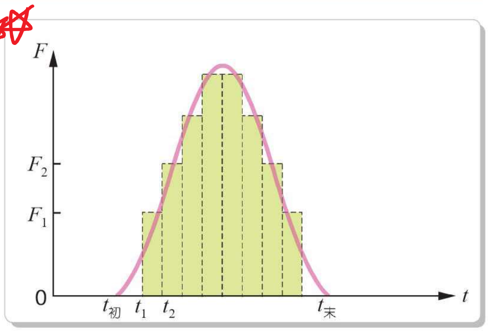
(方向不变)

進一步若僅考慮沿一直線上的作用情形，我們定義在初時刻 $t_{初}$ 至末時刻 $t_{末}$ 這段極短時間內，各小段的作用力 $\vec{F}$ 與時間間隔 Δt 乘積之總和，為衝力作用在質點的衝量 （impulse），其量值為 F-t 關係圖中，曲線與 t 軸包圍的面積如圖 6-5，衝量通常以 J 表示

$$J=\Sigma F\Delta t=\boxed{F\text{-}t\ 關係線下之面積} \tag{6.3}$$



▲ 圖 6-4　在短時間 $t_{初}$ 至 $t_{末}$ 中，非固定力 F 作用在質點上的關係圖，此力是一種衝力 。



▲ 圖 6-5　在 $t_{初}$ 至 $t_{末}$ 時間內，作用在質點上的衝量為各小段時間間隔內的力 F 與時間間隔 Δt 乘積之和，其量值即為 F-t 關係線下之面積 。

$kg \cdot m/s$

衝量的 SI 制單位為牛頓・秒或 N・s，並與動量單位一致。衝量為向量，其方向與作用力方向相同。將 $t_{初}=t_0$ 及 $t_{末}=t_n$ 之間分成相等的 n 小段時間間隔 Δt ，且 $\Delta t=t_1-t_0=t_2-t_1=\cdots\cdots=t_n-t_{n-1}$ ，由牛頓第二運動定律，在任意小段時間間隔所受的外力皆可產生加速度，以 t_1 至 t_2 為例

⋯慣性參考系，質量不變，$v \ll c$

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}}=m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}{\Delta t}=\frac{\vec{p}_2-\vec{p}_1}{\Delta t}\quad（\Delta t\ 趨近於零時）$$

其中 m 為質點的質量，$\Delta t=t_2-t_1$，$\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 與 $\vec{p}_1$、$\vec{p}_2$ 分別為質點在 t_1、t_2 時的速度與動量。上式在任意時間間隔 Δt 內皆成立，並可簡單寫為

7.牛頓 2nd law

⋯慣性參考系

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}}\quad 或\quad \vec{F}\Delta t=\Delta\vec{p}\quad（\Delta t\ 趨近於零時） \tag{6.4}$$

合力(外力)＝物体动量的時变率

代表物體所受的外力等於動量時變率，這其實是牛頓第二運動定律最初的敘述形式。

*

$$\begin{tikzcd}
\vec{F} \arrow[r, leftrightarrow, "\vec{F}=m\vec{a}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}"'] & \vec{a} \arrow[d, leftrightarrow, "\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}"] \\
\vec{p} \arrow[r, leftrightarrow, "\vec{p}=m\vec{v}"'] & \vec{v}
\end{tikzcd}$$

$\vec{F} \parallel \vec{a} \parallel \Delta\vec{p} \parallel \Delta\vec{v}$

$\vec{p} \parallel \vec{v}$

①定力 $\vec{J}=\vec{F}\cdot\Delta t$

②非定力，但方向不變

③非定力，方向也變

$\vec{J}=\vec{F_1}\Delta t_1+\vec{F_2}\Delta t_2+\vec{F_3}\Delta t_3+\cdots$（向量相加）

④ $\vec{J}=\vec{F}\Delta t=\Delta\vec{p}$

合力

由於質點在 $t_初$ 至 $t_末$ 間的每一小段皆滿足式（6.4）的牛頓第二運動定律，所以在這段期間所受的衝量

$$\vec{J}=\Sigma\vec{F}\Delta t=\Sigma\Delta\vec{p}=(\vec{p}_1-\vec{p}_0)+(\vec{p}_2-\vec{p}_1)+\cdots\cdots+(\vec{p}_n-\vec{p}_{n-1})=\vec{p}_n-\vec{p}_0$$

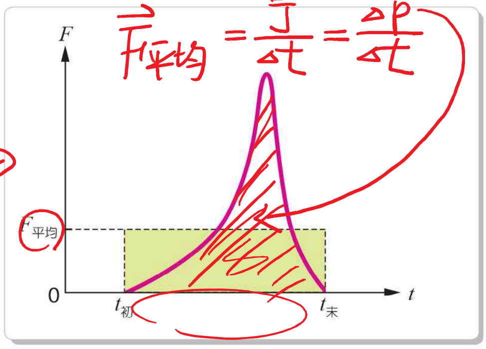
或

$$\boxed{\vec{J}=\vec{p}_末-\vec{p}_初}=\Delta\vec{p} \qquad (6.5)$$

（合力）

其中 $\vec{p}_初$ 與 $\vec{p}_末$ 分別表示質點在 $t_初$ 與 $t_末$ 的動量。式（6.5）代表在任意時間間隔內，物體所受外力的衝量等於物體最末與最初的動量差。此關係式稱為**衝量－動量定理**（impulse-momentum theorem），此原理與翰林版基礎物理(二) B 上冊第 4 章牛頓第二運動定律式（4.2）或本章式（6.4）的意義完全一致。式（6.4）強調在某一瞬間動量的變化率，式（6.5）則著重在動量變化的累積效果。

P. 平均作用力



▲ 圖 6-6　永遠會存在一固定值 $F_{平均}$，使得 $F_{平均}\times(t_末-t_初)$ 等於 F-t 曲線下之面積，即衝量 $\vec{J}=\vec{F}_{平均}\times(t_末-t_初)$。

由於一個變力的衝量或 F-t 曲線下的面積，永遠可以用量值固定的單一平均力 $\vec{F}_{平均}$ 與時間間隔 Δt 的乘積來表示（圖 6-6），因此自 $t_初$ 到 $t_末$，物體所受的衝量

$$\vec{J}=\Sigma\vec{F}\Delta t=\vec{F}_{平均}\times(t_末-t_初) \qquad (6.6)$$

綜合式（6.6）與式（6.5）可得

$$\vec{F}_{平均}\times(t_末-t_初)=\vec{J}=\vec{p}_末-\vec{p}_初 \qquad (6.7)$$

$\Delta\vec{p}$

即物體所受的衝量除了等於物體最末與最初的動量差之外，也可以固定的平均作用力 $\vec{F}_{平均}$ 與作用時間 $t_末-t_初$ 的乘積來表示。

＊跳高落地

$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{\vec{J}}{\Delta t}$

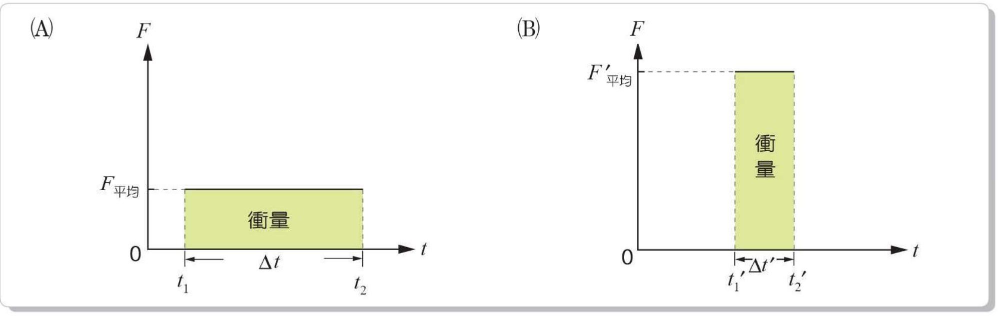
	$\vec{J}$	$\vec{F}$	Δt	$\Delta\vec{p}$	痛
硬地	相	大	小	相	痛大
軟墊	同	小	大	同	還好

若作用在物體的時間間隔 Δt 一定，則施加的衝力愈大，就會產生愈大的動量變化。例如：打棒球時，球員愈用力揮棒，球棒作用於球的力愈大，球的動量或速度的改變就愈大；此外，拍網球、踢足球與揮高爾夫球的情形也一樣（圖 6-7）。

▲ 圖 6-7　作用在球的外力愈大，球的速度或動量改變就愈大。

$\Delta p = \bar{F}\Delta t$

當物體受到外力，產生相同的動量變化時，由式（6.6）可知，若作用時間 $t_{末}-t_{初}$ 愈短，所受的平均作用力 $\vec{F}_{平均}$ 會愈大；反之，作用時間愈長，所受的平均作用力會愈小，如圖 6-8 所示。例如：1 用棒球手套接住一顆飛來的棒球，接球前與球靜止後，球的速度變化是固定的，也就是說接球時動量變化是固定的，若將接球的時間延長或捕手手套向後移，就可減少手所受到的衝擊力。同理，汽車的 2 安全帶或安全氣囊也是延長力的作用時間，以減少對人所造成的撞擊傷害。



▲ 圖 6-8　在衝量或動量變化相等的情況下〔$F_{平均}\times(\Delta t)=F'_{平均}\times(\Delta t')$〕，(A)力的作用時間愈長，所受的平均作用力愈小。(B)力的作用時間愈短，所受的平均作用力愈大。

範例 6-1

在撞擊測試裡，質量 2000 kg 的汽車撞擊牆壁，如下圖所示。若初始速度 v_1=15 m/s（向右）+15，撞後的速度 v_2=2.0 m/s（向左）−2，碰撞時間為 0.010 s，求：

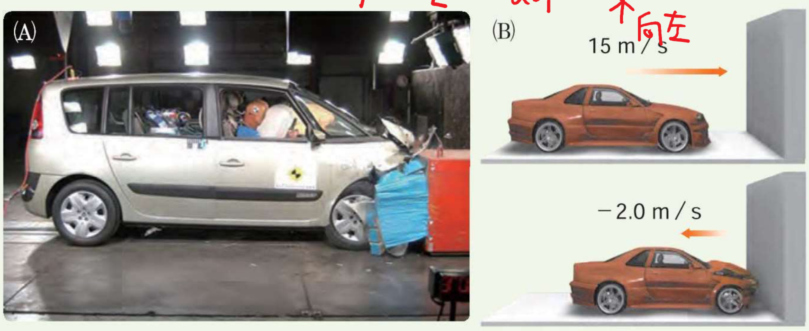
(1) 汽車的初始動量為何？ $\vec{P_1}=m\vec{v_1}=2000\times15=30000$ kg·m/s →

(2) 汽車的撞後動量為何？ $\vec{P_2}=m\vec{v_2}=2000\times(-2)=-4000$ kg·m/s 向左

(3) 碰撞期間牆給汽車的衝量為何？ $\vec{J}=\Delta\vec{P}=-4000-30000=-34000$ kg·m/s 向左

(4) 碰撞期間牆給汽車的平均作用力為何？ $\vec{F}=\frac{\vec{J}}{\Delta t}=\frac{-34000}{0.01}=-3.4\times10^6$ (N) 向左

【相關練習：習題 1.、2.】



▲ (A)牆壁施於汽車的巨大力量，使得汽車前端受損的程度非常嚴重。(B)汽車撞擊牆壁時，其動量的變化情形。

概念 動量、衝量的定義，衝量—動量定理，平均力 $\vec{F}_{平均}$ 與衝量 $\vec{J}$ 之關係。

策略 $\vec{p}_1=m\vec{v}_1$，$\vec{J}=\vec{p}_{末}-\vec{p}_{初}$，$\vec{F}_{平均}\times(t_{末}-t_{初})=\vec{J}$，定向右為正。

解 (1) 初始動量 $\vec{p}_1=m\vec{v}_1=2000\times15=3.0\times10^4$（kg·m/s），向右

(2) 撞後動量 $\vec{p}_2=m\vec{v}_2=2000\times(-2.0)=-4.0\times10^3$（kg·m/s），向左

(3) 衝量 $\vec{J}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=(-4.0\times10^3)-3.0\times10^4=-3.4\times10^4$（N·s），向左

(4) 平均作用力 $\vec{F}_{平均}=\frac{\vec{J}}{t_2-t_1}=\frac{-3.4\times10^4}{0.010}=-3.4\times10^6$（N），向左

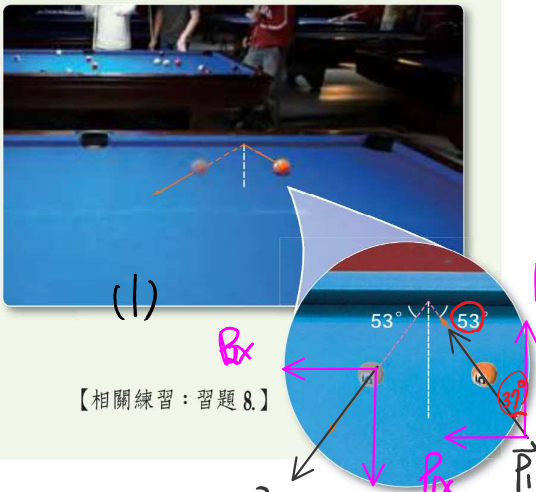
範例 6-2

撞球的質量為 1.0 kg，在光滑水平桌面上以 10 m/s 之速率、與桌壁夾 53° 角之方向撞擊桌壁，再以相同的速率及角度反彈，如右圖所示。若撞球與桌壁之接觸時間為 0.050 s，則：

10m/s

(1) 撞球與桌壁碰撞前、後的動量變化為何？

(2) 桌壁作用於撞球的平均作用力為何？



【相關練習：習題 8.】

(1) $P_{1y}=10\times\frac{4}{5}=8$ ↑　P_{2x}　P_{1x}　$\vec{P_1}=1\times10$　$\vec{P_2}=1\times10$　P_{2y} 8↓

$\Delta\vec{p}=P_{2y}-P_{1y}=-8-8=-16$ (kg·m/s) 向下

概念 1. 動量為質量與速度的乘積。

2. 動量為向量，定向右、向上為正，可利用向量的減法處理，求得動量變化。

3. 衝量—動量定理：

$\vec{F}_{平均}\times(t_{末}-t_{初})=\vec{p}_{末}-\vec{p}_{初}$。

(2) $\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{-16}{0.05}=-320$ (N) ↓ 向下

策略 1. $\vec{p}=m\vec{v}$ ⇨ $p_x=mv_x$，$p_y=mv_y$。

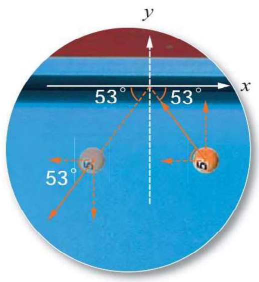
2. $\Delta\vec{p}=\vec{p}_{末}-\vec{p}_{初}=\vec{p}'-\vec{p}$

⇨ $\Delta p_x=mv_x'-mv_x$，$\Delta p_y=mv_y'-mv_y$。

3. $\vec{F}_{平均}=\frac{\Delta\vec{p}}{t'-t}$。

HW P6-2 ①~⑩

解 (1) 在 x、y 方向的動量變化分別為



$\Delta p_x=-1.0\times10\cos53°-(-1.0\times10\cos53°)=0$

$\Delta p_y=-1.0\times10\sin53°-1.0\times10\sin53°$

$=-16$ (kg·m/s)

故動量變化 $\Delta\vec{p}=16$ (kg·m/s)，方向指向 $-y$ 軸

(2) 平均作用力

$\vec{F}_{平均}=\frac{\Delta\vec{p}}{t'-t}=\frac{-16}{0.050}=320$ (N)，方向指向 $-y$ 軸

1 mole 24.5 l　　$\frac{10^5}{24.5}\times6\times10^{23}$　　$8\times6\times3$ m³　　1 m³ = 1000 l

100000　　~~144~~ 150000 = 10^5 l