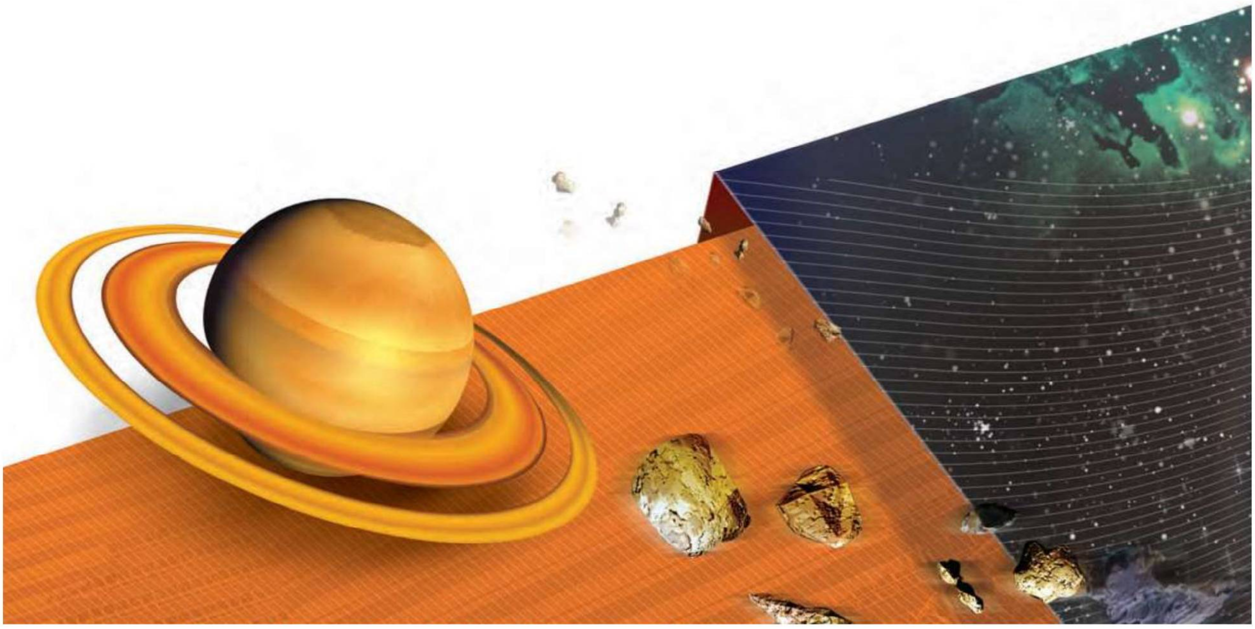
7 萬有引力



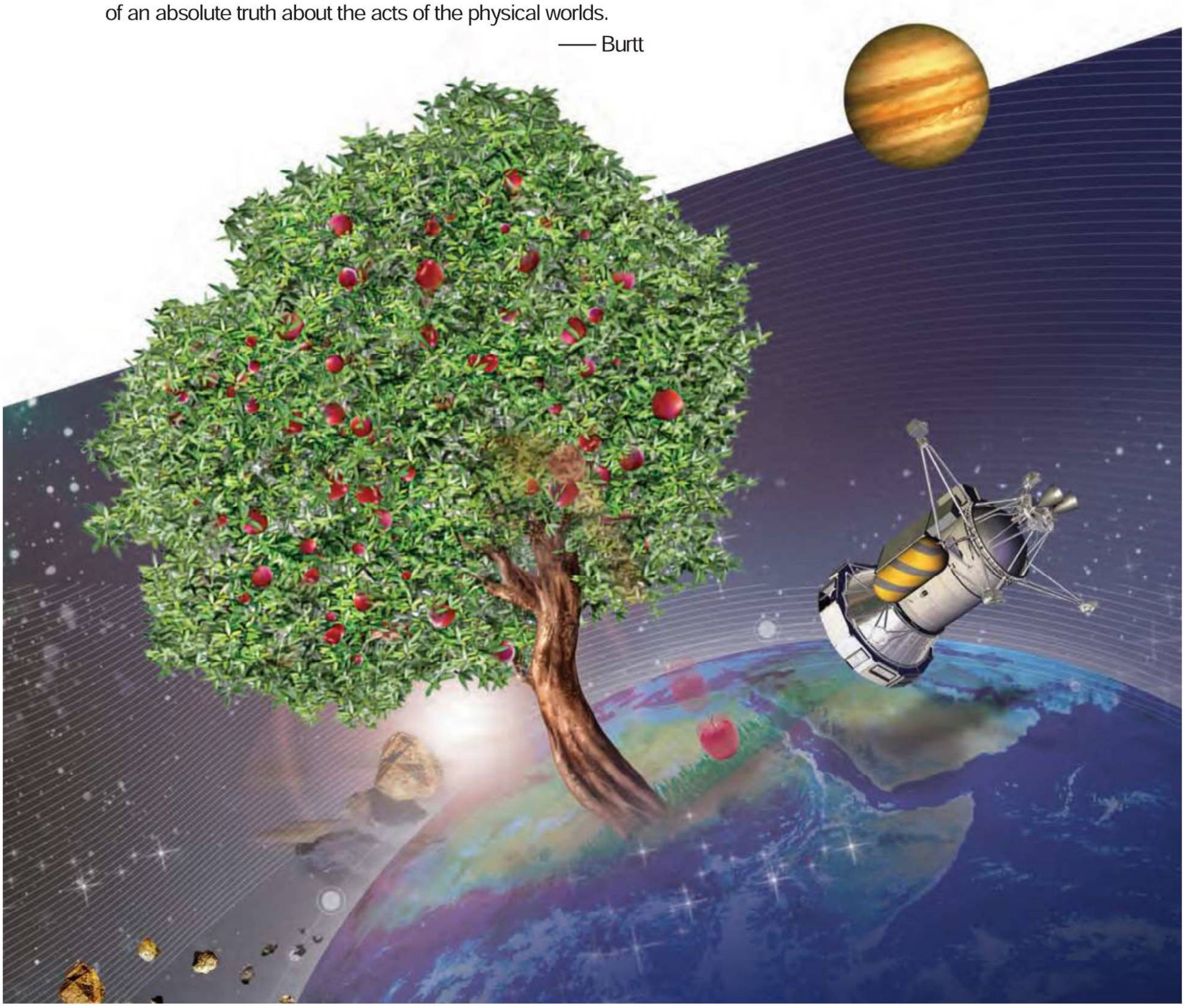
落葉飄向地面，瀑布奔流而下，……，如果沒有地球上的重力，這些美景將不會發生。星球的運行與人造衛星繞地球運轉，均源自於相同的原因──萬有引力。它是支配浩瀚宇宙、使之不息運轉的原因。

對牛頓而言，科學是由只闡述自然行為的數學定律所構成，這些定律可從現象中清楚地推導出來，並得到嚴格證實。這樣一來，科學便成為關於物理世界行為的一個絕對確定之真理體系。

──英國哲學家 柏特(1892～1989)

For Newton, science is merely constructed by the mathematical laws depicting the natural behaviors. These laws can be apparently deduced from, and verified firmly by the phenomena. Henceforth, science then becomes the system of an absolute truth about the acts of the physical worlds.

── Burtt



1. 歸納

2nd law　　3rd law

牛頓從克卜勒（Johannes Kepler，1571～1630，德國人）的行星運動定律獲得啟示，推導出①行星會受到指向太陽並與太陽距離平方成反比之力的作用。此外他也算②出月亮繞著地球運轉所需的力，③和蘋果在地表從樹上落地的力，這兩種力同樣有著與地心距離平方成反比的形式。因此推論宇宙間任何兩物體之間存在著互相吸引的力，稱為**萬有引力**（universal gravitation）。

這些力量來源相同

7-1 萬有引力定律

2. 推論過程　　① F的方向：

我們在翰林版基礎物理㈠第 3 章曾學過克卜勒的三個行星運動定律。其中的面積定律：「同一顆行星與太陽的連線，在相等時間內掃過的面積相等」。而牛頓發現，凡是滿足面積定律運動的行星，處處都受到指向太陽的外力作用。

② $F \propto \frac{1}{r^2}$ 另一方面，當ⓐ行星繞著太陽的軌跡若可以圓形來近似表示時，再由面積定律可知：行星必然作等速率運動。而對於作等速圓周運動的物體或行星而言，由於運動方向不斷在改變，故有加速度存在，ⓑ且此加速度即為向心加速度，其量值由翰林版基礎物理㈡ B 上冊第 5 章式（5.6）為

ⓑ

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{7.1}$$

其中 v、R、T 分別為質點的速率、圓半徑、週期。

進一步而言，ⓒ由於行星運動皆滿足週期定律，即每一顆行星的週期 T 與軌道半徑 R 都有如下關係：

$$\frac{R^3}{T^2} = K \quad 或 \quad \frac{1}{T^2} = \frac{K}{R^3}, \quad K 為定值 \tag{7.2}$$

將式（7.2）與式（7.1）結合，則

$$a=\frac{4\pi^2R}{T^2}=\frac{4\pi^2RK}{R^3}=\frac{4\pi^2K}{R^2}$$

由牛頓第二運動定律，行星所受外力量值 F 與加速度成正比，即

$F=ma$

$$F\propto a$$

故

$$\Rightarrow F\propto\frac{1}{R^2}(4\pi^2K)\Rightarrow F\propto\frac{1}{R^2}\qquad 7.3$$

所以，行星受到指向太陽的向心力 F 與圓半徑（即行星到太陽的距離）R 之平方成反比，由於行星受力方向隨時都指向太陽，似乎太陽的存在是產生向心力的原因。

③ $F\propto Mm$

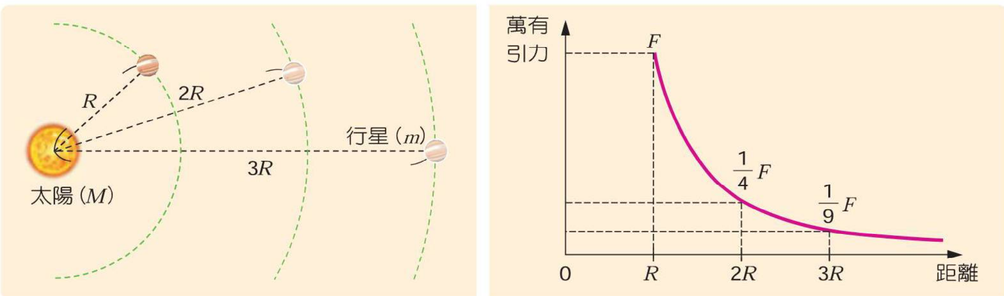
若運動中的行星一直受到此種太陽的作用力影響，由作用—反作用定律可知，太陽必定亦受到行星量值相等的反作用力影響；因此，行星與太陽之間的相互作用力或吸引力，必須與兩星體的質量乘積成正比才有可能，即

$$F\propto mM\qquad 7.4$$

3\. 結合式（7.3）與式（7.4），牛頓在 1687 年寫下了他劃時代的**萬有引力定律**（law of universal gravitation）：

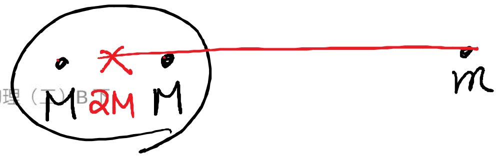
> 在宇宙中的任何一個星體均會吸引另外一個星體，其吸引力的量值與此兩星體的質量乘積成正比，並與它們之間的距離平方成反比。

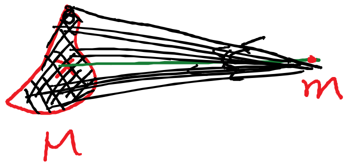
例如：同一顆行星，與太陽的距離由原來的 R，變成 $2R$ 時，其間的萬有引力將變成原來的 $\frac{1}{4}$（如圖 7-1）。



▲ 圖 7-1　行星與太陽之間的萬有引力與行星至太陽之間距離的平方成反比。

*





由於星體是由質點組成，兩星體會互相吸引，可以說是由於兩星體內部這些具有質量的各個小部分相互吸引的結果，故天體的相互吸引力，可以推廣至任何具有質量物體的吸引力，即質量各為 m、M 的兩個質點相距 R 時，它們之間的引力為

4. 任何兩"質點"間均具有萬有引力 ①量值 ②方向：在兩質點連線上 ③必須是質點或均勻球體(球殼)

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \qquad 7.1$$

M —R— m

5. G的測定

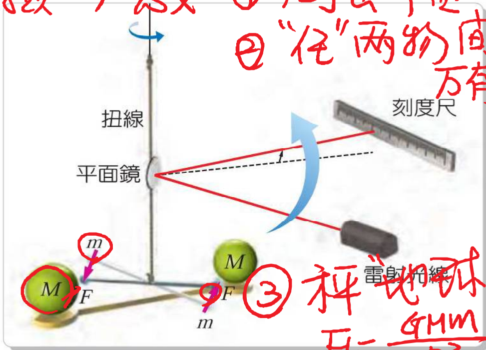
其中比例常數 G 稱為**重力常數**（gravitational constant），此值一直到 1873 年，物理學家才利用了 $\boxed{1798}$ 年 $\boxed{\text{卡文迪西}}$（Henry Cavendish，1731 ～ 1810，英國人）所設計之精緻 $\boxed{\text{實驗}}$（圖 7-2）的數據中，延伸推導得知，目前的公認值為 $G = 6.672\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2}$。

扭秤實驗 ⇒ 意義 ①測出G值 ②"任"兩物間均具萬有引力 ③秤地球

$$F = \frac{GMm}{R^2} = mg \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G} \ \#$$

m ↓g

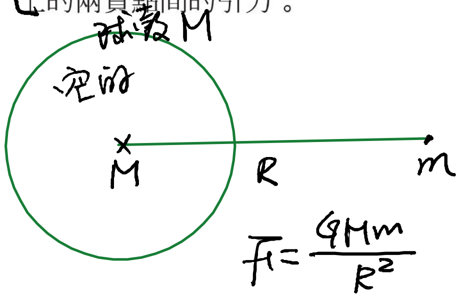
任何一對同學，不論男女，由於具有質量，故有引力存在，但由於重力常數 G 值太小，使得彼此間的引力微弱得察覺不到。只有由巨大質量的星體所產生的萬有引力，才較易呈現。

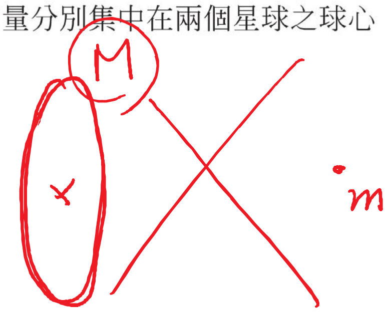


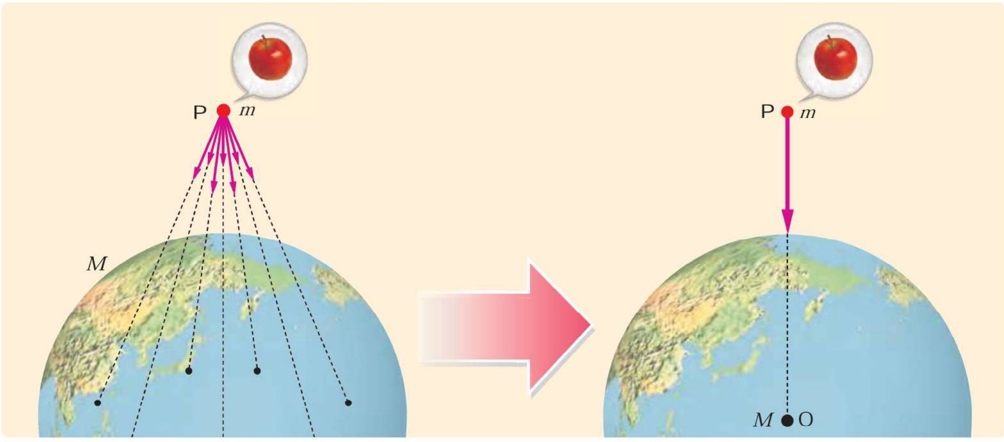
▲ 圖 7-2 以現代方法重做卡文迪西實驗之示意圖：兩個有質量的一般物體亦具有吸引力，可使得扭秤旋轉，而讓扭秤上的平面鏡方向改變，造成反射雷射光方向的改變，如此即可測量出重力常數 G。

對太陽而言，地球可視為質點；但是對於離地面僅數公尺高的蘋果而言，地球顯然不可視為質點。此時，要如何算出蘋果所受地球引力的量值呢？牛頓為了解決這個問題，特別發展出積分學，證明了密度均勻的 $\boxed{\text{球殼}}$ 施於球殼外質點的引力，與將球殼質量集中在球心（質心）對此質點所施的引力，兩者之量值與方向完全相同，而 $\boxed{\text{實心}}$ 的球體可看成由層層球殼組成。因此當考慮對星球外某一物體的引力時，可將星球當作質量集中在球心的質點（圖 7-3）。同樣，考慮兩個星球間的引力，不論它們距離的遠近，可近似於質量分別集中在兩個星球之球心上的兩質點間的引力。

大球殼原理







▲ 圖 7-3　質量為 M 之球體（地球）對質量為 m 在球外 P 之質點（蘋果）的引力，等於質量 M 全部集中在球心 O 處對質量為 m 在 P 處質點之引力。

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times1}{(6.38\times10^{6})^2} = 9.80\,(N)$$

範例 7-1

(1) 質量為 1.00 kg 的蘋果在地球表面所受到的地球引力有多大？

(2) 若自由釋放此蘋果，所產生的加速度為多少？

（地球半徑＝6.38×10^{6} m，地球質量＝5.98×10^{24} kg）

$9.8N = F = ma$

$a = 9.8$

概念　萬有引力定律，牛頓第二運動定律。

策略　1. 質量為 m 的物體，在地球表面所受到質量為 M 的地球之引力為

$$g = \frac{F}{m} = \frac{\frac{GMm}{R^2}}{m}$$

$F = \dfrac{GmM}{R^2}$，其中 R 為地球半徑。

$$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}}$$

2. 此地球的引力可使質量為 m 的物體產生加速度運動，且由牛頓第二運動定律：$\dfrac{GmM}{R^2} = F = ma$。

解　(1) 質量 1 kg 的蘋果所受的引力為

$$F = \frac{GmM}{R^2} = 6.67\times10^{-11}\times\frac{1.00\times5.98\times10^{24}}{(6.38\times10^{6})^2} = 9.80\ (\text{N})$$

(2) 質量 1 kg 的蘋果自由釋放的加速度為

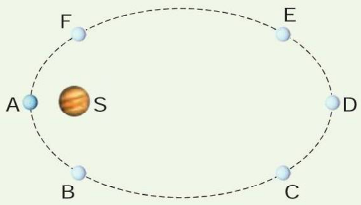
$$a = \frac{F}{m} = \frac{9.80}{1.00} = 9.80\ (\text{m/s}^2)$$

範例 7-2

若有一行星繞著恆星 S 作橢圓軌道運動，則下列有關行星在右圖所示各點的加速度量值何者最大？

$a \propto F = \frac{GMm}{R^2}$

【修改自 98. 指考】



概念 萬有引力定律、牛頓第二運動定律。

策略 1. 質量為 m 的行星受到質量為 M 的恆星之萬有引力為 $F=\frac{GMm}{R^2}$，其中 R 為行星和恆星間的距離。

2. 行星所受到的引力可使行星產生加速度，由牛頓第二運動定律：
$\frac{GMm}{R^2}=F=ma$。

解 行星所受到的引力為

$F=\frac{GMm}{R^2}=ma \Rightarrow a=\frac{GM}{R^2}$

a 最大，R 必須最小，由題圖可知行星在 A 點與恆星的距離最小，故行星在 A 點的加速度量值最大。

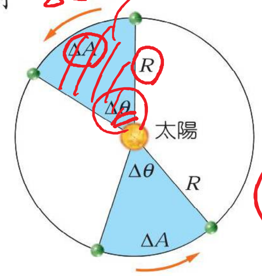
補充資料　當行星繞著太陽運轉的軌跡是圓，行星必然作等速率運動

概念延伸

克卜勒行星第二運動定律又稱面積定律，其敘述為：同一顆行星與太陽的連線在相等時間內掃過的面積相等。

如下圖，當行星繞著太陽運轉的軌跡是圓時，行星與太陽的連線長度為 R（此連線即為行星繞著太陽運轉的圓形軌跡的半徑），在某一時間間隔 Δt 中，連線所掃過的面積大小為 ΔA，則

$\frac{1}{2}r^2\theta$　　Δt　　$\Delta A = \pi R^2 \times \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}R^2\Delta\theta$



▶ 若行星繞日軌跡為圓時，因又滿足面積定律，行星必為等速率運動。

$$\Delta A=\frac{R\cdot R\Delta\theta}{2}$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{R^2}{2}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{1}{2}R^2\omega=\boxed{\frac{1}{2}Rv}=\text{常數}$$

$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$　　$v=R\omega$

因為 R 為圓的半徑，為一固定值，因此 v 應為一固定值。所以說，當行星繞著太陽運轉的軌跡是圓時，行星必然作等速率運動。

7-2 地球表面的重力與重力加速度

1.

在地球表面的物體受到地球引力所呈現出的重力，與任何兩物體之間的萬有引力，都是來自於相同的原因，具有相同的形式。因此，萬有引力也常稱為**重力**（gravitational force）。

假設質量為 m 的物體在地表附近所受的重力 W，可使物體產生的重力加速度為 a，由牛頓第二運動定律可知

2. $F = \frac{GMm}{R^2}$

$F = ma$

$$W = G\frac{M_E m}{R^2} = ma \tag{7.6}$$

其中 M_E 為地球的質量，R 為地心與物體間的距離。得到重力加速度

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{GM_E}{R^2}} = g \tag{7.7}$$

由於地球質量 M_E 及地球半徑 R_E 都是定值，因此地球表面的加速度 a 是一個定值，常以符號 g 來表示，當實驗測得重力加速度 $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$，由地球半徑 $6.40 \times 10^3\ \mathrm{km}$，即可計算出地球質量

3. 由 g 測 M_E

$$\boxed{M_E = \frac{gR_E^2}{G}} \approx 6.01 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

在距地面高度為 R_E（或至地心距離為 $2R_E$）處的重力加速度，為地表上重力加速度的四分之一（圖 7-4）。表 7-1 為物體在地球外部不同高度的重力加速度。

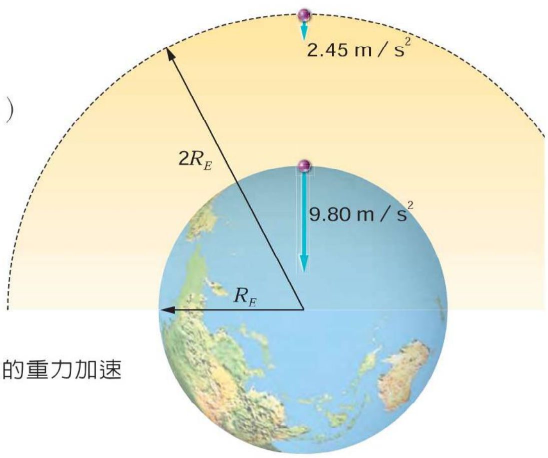
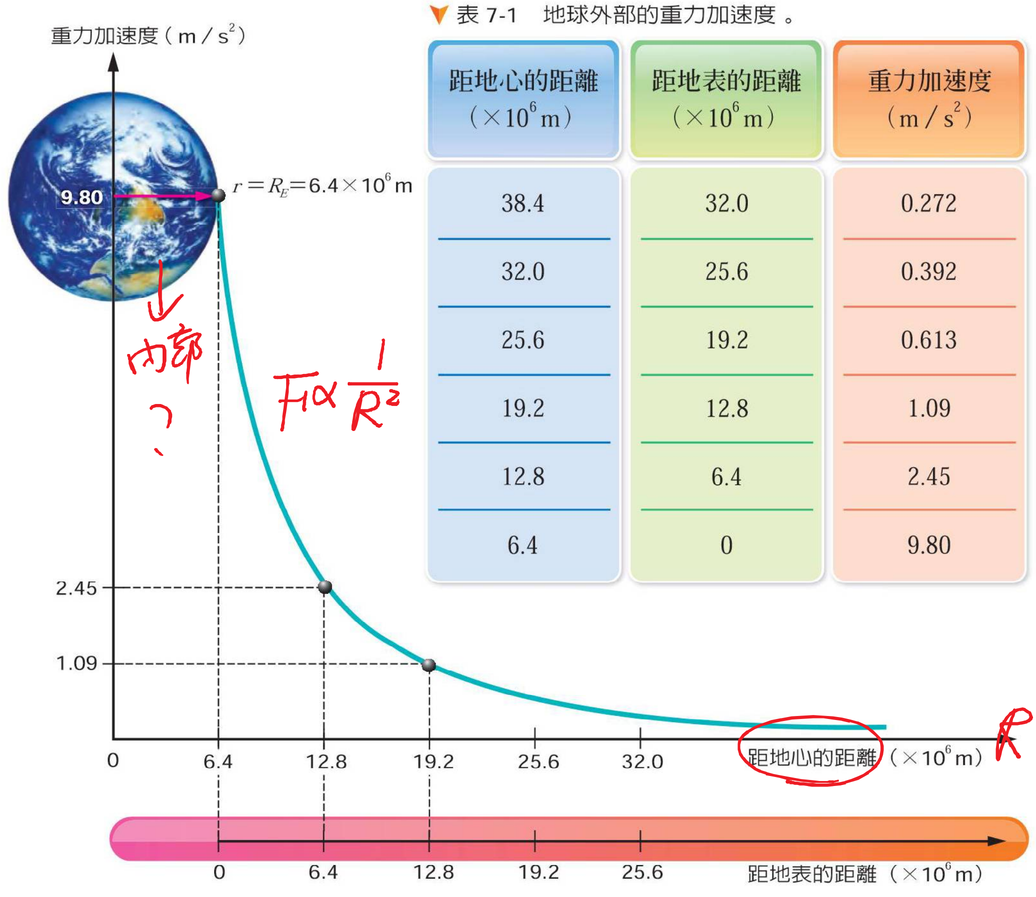


圖 7-4　地球表面的重力加速度：距離地球中心 $2R_E$ 處的重力加速度是地球表面重力加速度的四分之一。

表 7-1　地球外部的重力加速度。

距地心的距離（$\times 10^6$ m）	距地表的距離（$\times 10^6$ m）	重力加速度（m/s^2）
38.4	32.0	0.272
32.0	25.6	0.392
25.6	19.2	0.613
19.2	12.8	1.09
12.8	6.4	2.45
6.4	0	9.80



地球外部的重力加速度。

4.

物體在其他星體外部所受的重力加速度，與地球的情形相同，在距星體中心 r 處的重力加速度量值為

$$F=\frac{GMm}{r^2}=mg \Rightarrow \boxed{g=\frac{GM}{r^2}} \qquad 7.8$$

其中 M 為星體之質量。即星體對其周圍空間中某一物體的重力加速度與該物體至星體中心的距離平方成反比，與星體的質量成正比。

$F = \frac{GMm}{R^2}$　$m \rightarrow \frac{1}{3}$　$R^2 \rightarrow R' = 3R$　$F \downarrow \frac{1}{27}$

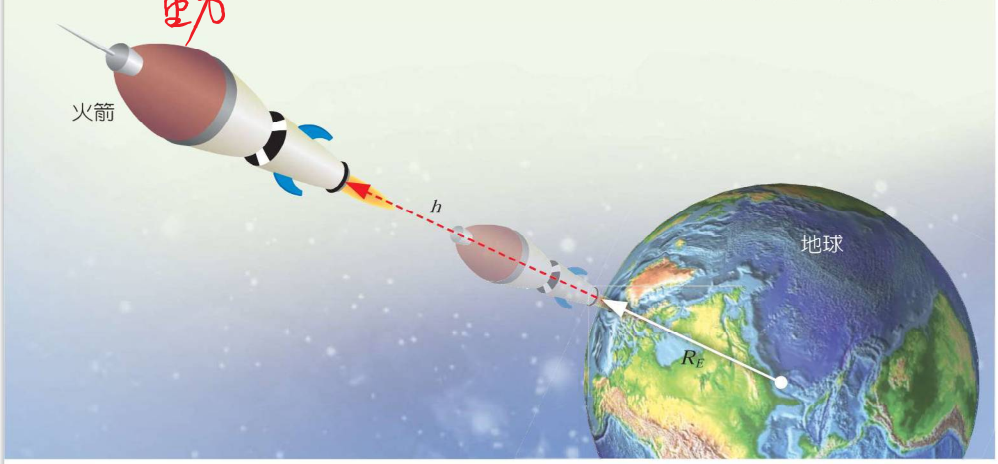
3R　2R　R

範例 7-3

如下圖，設地球的半徑為 R_E，火箭由地面垂直升高，當其質量剩為出發時的 $\frac{1}{3}$ 時，其重量變為出發時重量的 $\frac{1}{27}$，則此時火箭離地面的高度為若干？

【相關練習：習題 1.、5.】

動



概念

1. 火箭的重量等於火箭受到地球的萬有引力。
2. 萬有引力定律：$F = \frac{GMm}{R^2}$。

策略

1. 若火箭在地球表面的重量為 F，由題意知在地面上空 h 高度處的重量為 $\frac{1}{27}F$。
2. 火箭出發時質量為 m，在地面上空 h 高度處的質量為 $\frac{1}{3}m$。
3. 在地面上空 h 高度處與地心距離為 $R_E + h$。

解

火箭在地球表面的重量：$F = \frac{GM_E m}{R_E^2}$ ……①

火箭在地面上空 h 高度處的重量：$\frac{1}{27}F = \frac{GM_E(\frac{1}{3}m)}{(R_E+h)^2}$ ……②

$\frac{①}{②} \Rightarrow 27 = \frac{3(R_E+h)^2}{R_E^2}$，$h = 2R_E$，即 $\frac{h}{R_E} = 2$

高度為地球半徑的 2 倍。

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

(1) $M=V\times\rho$
$\downarrow b^3 \quad \downarrow a$

(2) $g=\frac{GM}{R^2}$ $GM\to ab^3$ $R^2 \to b$倍

$\Rightarrow \frac{ab^3}{b^2}=ab$

範例 7-4


如右圖，有一星球之密度為地球密度的 a 倍，其半徑為地球半徑的 b 倍，求：

(1) 該星球質量為地球質量的幾倍？

(2) 該星球表面之重力加速度為地球表面之重力加速度的幾倍？

【相關練習：習題 6.～8.】【修改自 95. 指考】

HW
p7-1 ①-⑦
p7-8 ①-⑥
实力養成：
p6-26
p6-27
$\boxed{\text{ch7}}$

概念 1. 密度、質量與體積之關係：$\rho=\dfrac{M}{V}$。

2. 重力加速度 $g=\dfrac{GM}{R^2}$。

策略 1. 星球體積 V 與星球半徑 R 的關係：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$。

2. 質量 M 與體積 V 的關係：$M=\rho V$。

3. 星球表面重力加速度 g 與星球半徑 R、星球質量 M 的關係：$g=\dfrac{GM}{R^2}$。

解 設地球密度為 ρ_E，半徑為 R_E，質量為 M_E

則星球密度為 $a\rho_E$，半徑為 bR_E，質量為 M

(1) 星球與地球之質量比

$$M:M_E=a\rho_E\frac{4}{3}\pi(bR_E)^3:\rho_E\frac{4}{3}\pi R_E^3=ab^3:1$$

(2) 星球表面與地球表面之重力加速度比

$$g:g_E=\frac{GM}{(bR_E)^2}:\frac{GM_E}{R_E^2}=\frac{ab^3}{b^2}:\frac{1}{1}=ab:1$$