第 7 章　萬有引力

§7-1 萬有引力定律

本節學習重點

1. 複習高一基礎物理的克卜勒行星運動定律，包含描述行星軌道形狀的第一定律，描述行星運動快慢的第二定律，以及描述行星週期的第三定律。
   克卜勒行星運動第三定律描述：
   同一個恆星系統的行星，平均軌道半徑 a 愈大，週期 T 也就愈長。
   關係式：
   $$\frac{(\text{週期})^2}{(\text{平均軌道半徑})^3}=\text{定值}$$
   $$\boxed{\frac{T^2}{a^3}=\text{定值}}$$
2. 萬有引力定律：任何兩個質點之間都彼此互相吸引，引力的量值和兩質量的乘積成正比，和兩質點之間距離的平方成反比，其方向在沿著兩質點的連線上且相向。
3. 卡文迪西進行扭秤實驗，證實了萬有引力定律，並可由其實驗數據中推算出重力常數。
4. 萬有引力定律公式中的距離 r 為兩質點間的距離或均勻球體之球心距離。
5. 複習等速圓周運動的概念。作等速圓周運動的物體，在圓周上每一點均受到指向圓心的力作用，此力稱為向心力。若物體的質量為 m，速率為 v，半徑為 R，週期為 T，角速率為ω，則以數學式表示向心力為
   $$F_c=ma_c=m\frac{v^2}{R}=m\frac{4\pi^2R}{T^2}=mR\omega^2$$

範例：

1. 已知地球半徑為 R，人造衛星甲在地面上空 R 處運行，週期為 T；另有一人造衛星乙在地面上空 $3R$ 處運行，則人造衛星乙的繞轉週期大約為多少?
   (A)$2T$　(B)$2\sqrt{2}T$　(C)$4T$　(D)$4\sqrt{2}T$　(E)$8T$

$$\left(\frac{R^3}{T^2}\right)_{甲}=\left(\frac{R^3}{T^2}\right)_{乙}\Rightarrow\frac{(2R)^3}{T^2}=\frac{(\cancel{4R})^3}{T_乙^2}$$

與地心距離

$$\Rightarrow\frac{1}{T^2}=\frac{8}{T_乙^2}$$

$$\Rightarrow T_乙^2=8T^2\Rightarrow T_乙=\sqrt{8}\,T=2\sqrt{2}\,T$$

2. 地球與太陽的平均距離為一個天文單位（A.U.）。已知哈雷彗星約 76 年回歸 1 次，哈雷彗星與太陽的最近距離約為 0.6 天文單位(A.U.)。設所有行星對哈雷彗星的影響均可略去不計，則可推算哈雷彗星與太陽的最遠距離與下列那一距離最為接近？

(A) 17.6 A.U.　(B) 35.2 A.U.　(C) 70.4 A.U.　(D) 140.8 A.U.

① $\left(\frac{R^3}{T^2}\right)_{哈} = \left(\frac{R^3}{T^2}\right)_{地} = \frac{1^3}{1^2}$

$\Rightarrow \frac{R^3}{76^2} = 1 \Rightarrow R \doteq 17.9$ (AU)

$\boxed{估算}$ $6400 \Rightarrow \sqrt[3]{6400} \leq 20$ (AU)

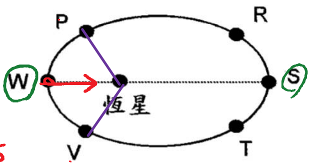
② $R = \frac{R_{min}+R_{max}}{2}$

$\Rightarrow 17.9 = \frac{0.6+R_{max}}{2}$

$\Rightarrow R_{max} \doteq 35.2$ (AU)

$R = \frac{0.6+R_{max}}{2}$，$<20$，$R_{max} < 40$

3. 如圖所示為一行星環繞一恆星的橢圓軌道，針對加速度、角動量和速度三項物理量的量值來比較各點的大小。

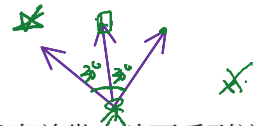


1° $F = ma \Rightarrow a \propto F \propto \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow a \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow a_W > a_P = a_V > a_R = a_T > a_S$

2° 角動量相同

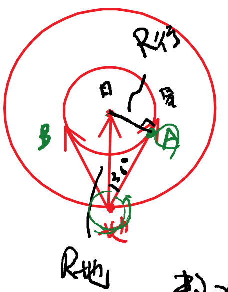
3° $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ = 定值 $\Rightarrow \frac{1}{2} r v \sin\theta$ = 定值 $\Rightarrow V_W > V_P = V_V > V_R = V_T > V_S$

4. 若地球和某行星繞太陽運轉的軌道皆是圓形，而在地面量得地球和太陽間連線和地球與行星間的連線最大視角為 30°，回答下列問題：



(1) 該行星繞日公轉的週期為地球繞日週期的幾倍?

(2) 地球上見此行星可能出現的最早時刻是什麼時候? 亦即日出前幾小時可看到這顆行星？



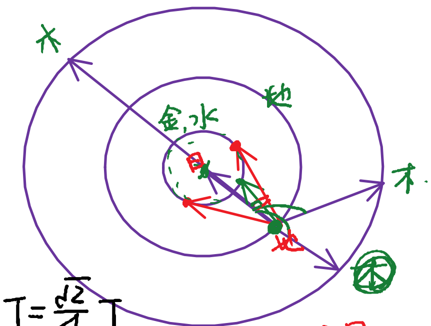
(1) ① $\frac{R_{行}}{R_{地}} = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$R_{行} = \frac{1}{2} R_{地}$

② $\left(\frac{R^3}{T^2}\right)_{行} = \left(\frac{R^3}{T^2}\right)_{地}$

$\Rightarrow \frac{(\frac{1}{2}R_{地})^3}{T_{行}^2} = \frac{R_{地}^3}{T_{地}^2}$

整理 $\Rightarrow T_{行} = \sqrt{\frac{1}{8}}\,T = \frac{2\sqrt{2}}{8}T = \frac{\sqrt{2}}{4}T$



(2) A: 日出前 2小時 → 西大距

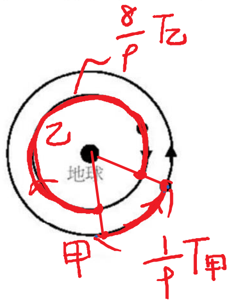
水星

B: 日落後 2小時 → 東大距

*金星 最大視角≒45°

5. 如圖所示，甲、乙兩人造衛星以圓形軌道繞地球運轉，假設運行的軌道在同一平面上，且運行的方向相反。甲衛星發現每隔 1/9 週期會與乙衛星相遇，亦即甲、乙兩衛星與地球恰在一直線上且在地球同側，若忽略甲、乙兩衛星間的作用力，則甲、乙兩衛星軌道半徑比為何？ [95 年指考]

(A) 1：4 (B) 1：2 (C) 1：1 (D) 2：1 (E) 4：1



① $\frac{1}{P}T_甲 = \frac{8}{P}T_乙$

$\Rightarrow T_甲 = 8T_乙$

② $\left(\frac{R^3}{T^2}\right)_甲 = \left(\frac{R^3}{T^2}\right)_乙$

$\Rightarrow \frac{R_甲^3}{(8T_乙)^2} = \frac{R_乙^3}{T_乙^2} \Rightarrow \frac{R_甲^3}{64} = \frac{R_乙^3}{1}$

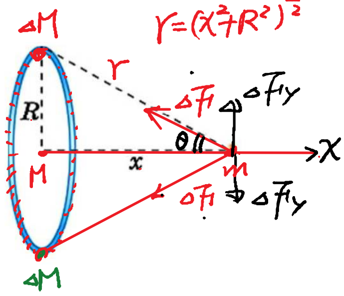
$\Rightarrow R_甲 = 4R_乙 \Rightarrow R_甲 : R_乙 = 4:1$

6. 如右圖所示，一個半徑為 R、質量為 M 的均勻圓環，在垂直環面中心軸上距環心 x 處，置一質量 m 的質點，請回答下列問題。 $\frac{GMm}{x^2}$

(1) 此質點所受圓環的引力 F 為何？

(2) 承(1)，若 $x=0$ 時，F 為何？

(3) 承(1)，若 $x \gg R$ 時，F 為何？



(1) $\Delta F_1 = \frac{G\Delta M m}{r^2}$

① 與 x 軸垂直的分量：兩兩抵消

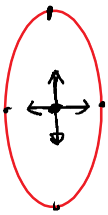
② x 軸方向 $\Delta F_x = \Delta F_1\cos\theta$，$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\Rightarrow \Sigma\Delta F_x = \Sigma\Delta F_1\cos\theta = \Sigma\frac{G\Delta M m}{r^2}\times\frac{x}{r}$

$= \frac{Gmx}{r^3}\Sigma\Delta M$，$\Sigma\Delta M = M$

$= \frac{GMmx}{r^3} \Rightarrow F_1 = \frac{GMmx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$

(2) $x=0 \Rightarrow F_1=0$



(3) $x \gg R \Rightarrow F_1 = \frac{GMmx}{x^3} = \frac{GMm}{x^2}$

視M為質點 $F_1 = \frac{GMm}{x^2}$ #

$T^2 \propto r^3 \Rightarrow F \propto \frac{1}{r^2}$

7. 若克卜勒第三定律的形式為 $T\propto r^2$，則萬有引力與兩星球之間距離的關係為何？

r

1° $T \propto r^2$

2° 設 $F = \frac{GMm}{r^n} = \frac{4\pi^2 r m}{T^2} = F_c$

$\Rightarrow T^2 \propto r^{n+1}$

$T^2 \propto r^4$ (題目)

$\left.\begin{matrix} T^2 \propto r^{n+1} \\ T^2 \propto r^4 \end{matrix}\right\} n+1=4 \Rightarrow n=3$

$\Rightarrow F = \frac{GMm}{r^3}$ ※

實力養成：

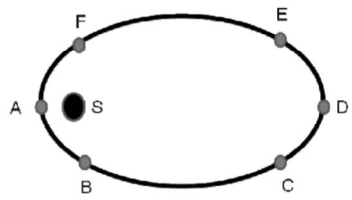
1. 已知一行星繞太陽的平均軌道半徑為 R，週期為 T；今發現一彗星每隔 t 年出現在太陽附近，若其距離太陽的最短距離為 r，則此彗星距太陽的最大距離為何？

2. 金星為內行星，於地球上所見金星與地球、及地球與太陽兩連線有最大夾角為 θ，則金星繞太陽的週期為地球公轉週期的多少倍？

(A) $(\sin\theta)^{2/3}$ (B) $(\sin\theta)^{3/2}$ (C) $(\tan\theta)^{3/2}$ (D) $(\tan\theta)^{2/3}$ (E) $(\cos\theta)^{3/2}$

【本題可延伸討論角速度量值、面積速率的比較，亦即金星繞太陽的角速度的量值為地球的多少倍？面積速率為多少倍？試討論答案為何】

3. 若有一行星繞著恆星 S 作橢圓軌道運動，則下列有關行星在右圖所示各點的加速度量值的敘述，何者正確？ [98 指考]



(A)所有點都一樣大 (B)點 A 處最大

(C)點 B 與點 F 處最大 (D)點 C 與點 E 處最大

(E)點 D 處最大

4. 氣壓可以代表單位面積上方空氣柱的重量，某一氣象站的海拔高度大約是3000公尺，平均氣壓大約是 700 百帕，在 3000 公尺高度以下的大氣層，約占整個大氣層空　氣重量的多少百分比？(103 學測)

(A)10 (B)20 (C)30 (D)40 (E)50

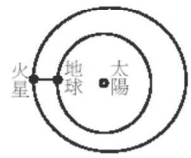
5. 一般認為銀河系中有一個超大質量的黑洞。有些天文學家估計這黑洞的質量大約是太陽的四百萬倍，太陽離此超大質量黑洞的距離約為 28000 光年。如果太陽、該超大質量黑洞與地球排成一直線，且二者對地球的主要影響只有萬有引力，則這個超大質量黑洞和地球之間的萬有引力、大約是地球和太陽之間萬有引力的多少倍？(28000 光年大約是 1.8×10^9 天文單位) (103 學測)

(A)1.2×10^{-12} (B)2.5×10^{-7} (C)2.2×10^{-3} (D)4×10^{6} (E)8.1×10^{11}

Ans: 1. $2R\left(\dfrac{t}{T}\right)^{2/3}-r$ 2.B 3.B 4.C 5.A

6. 在星空中呈現火紅顏色的火星，自古以來便捕獲了人類的目光。在近一百多年來，從火星運河、火星人等事件，讓火星成為眾所矚目的焦點，甚至美國好萊塢每隔幾年都會為它拍攝一部相關電影，如《火星任務》、《全面失控》…。

早在太空時代以前，天文學家便已經測量出各大行星繞行太陽的週期，並據此推算各行星與太陽的距離。火星約以 1.88 年繞行太陽一周。在 2003 年 8 月，火星與地球之間的距離成為六萬年來最接近的一次，引起全球科學家與大眾媒體的興趣，民眾也趕赴各天文台觀賞火星。



在 1996 年，科學家宣佈一顆在南極冰原所發現的火星隕石上，

呈現出古微生物化石的跡象。此一發現再度引起全球對火星的熱潮，美國為此多次發射無人探測太空船，歐洲、日本也隨著發射無人太空船，以進行火星觀測。這些探測活動，也間接為人類在未來登陸火星而鋪路。美國科幻作家克拉克曾在其膾炙人口的小說中，描述人類如何在外太空搭建觀測平台與「太空電梯」，以探測火星。事實上，目前科學家已在設想，如何在火星上建立適合人類居住的環境。火星的表面重力比地球小，比較容易在火星建造觀測平台與太空電梯。隨著科技的進步與發展，人類登陸火星應是指日可待了。 [93 學測]

(1) 2003 年 8 月火星與地球的距離是數萬年來最接近的一次，下圖為其示意圖（未按實際比例描繪），下列哪一選項是主要的原因？

(A)地球與火星同時位於近日點附近

(B)火星位於遠日點附近，地球位於近日點附近

(C)火星位於近日點附近，地球位於遠日點附近

(D)火星位於近日點附近，地球位置沒有影響

(E)地球位於遠日點附近，火星位置沒有影響

(2) 火星繞太陽的運轉週期是 1.88 年。依據克卜勒第三定律，試問火星離太陽的距離約是地球離太陽距離的多少倍？

(A) 1.52 倍 (B) 1.88 倍 (C) 2.58 倍 (D) 3.76 倍

7. 地球繞太陽運動軌道的平均半徑定義為一個天文單位，某行星繞太陽之平均半徑約為 10 個天文單位，則該行星公轉的週期約為地球上的多少年？[102 指考]

(A) 1 (B) 5 (C) 15 (D) 32 (E) 100

Ans: 6.(1)C (2)A 7.D

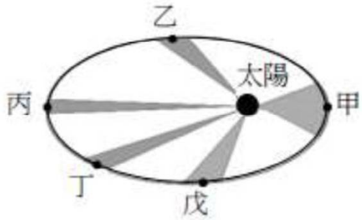
8. 海爾-波普彗星的週期約為 2500 年，則其與太陽的平均距離，約為地球與太陽平均距離的多少倍？

(A) 2500 (B) 1665 (C) 615 (D) 185 (E) 50

9. 地球質量為月球質量的 81 倍，兩者連心線的長度為 d，設一火箭在連心線上，至地心的距離為 a，若二星球對火箭的引力和為零，則 a、d 的關係為下列哪一項?

(A) $\frac{a}{d}=\frac{80}{81}$ (B) $\frac{a}{d}=\frac{1}{10}$ (C) $\frac{a}{d}=\frac{\sqrt{80}}{9}$ (D) $\frac{a}{d}=\frac{9}{10}$

10. 克卜勒分析第谷的行星觀測資料發現等面積定律，即一個行星與太陽的連線，在等長的時間內，於行星軌道所掃過的面積必相等，如圖中的五個灰色區域所示。已知太陽在右邊的焦點上，則此行星在甲、乙、丙、丁、戊五點上，哪一點的動能最大？



(A)甲　(B)乙　(C)丙　(D)丁　(E)戊。　(103 學測)

11. 假設 Kepler 第三定律為行星繞日的軌道平均半徑與轉動週期成正比。若依照牛頓推導萬有引力的方法，則將推得兩個質點之間的萬有引力與距離的關係為何？

12. 假設萬有引力係兩物體間距離的 4 次方成反比，如以 R 及 T 分別代表行星繞日作圓周運動時的軌道半徑及週期。則下列各項比值中何者對所有行星而言均相同？

(A) $\frac{R}{T^2}$　(B) $\frac{R^3}{T^2}$　(C) $\frac{R^{2/3}}{T^2}$　(D) $\frac{R^5}{T^2}$　(E) $\frac{R^{5/2}}{T^2}$

13. 若將地球公轉太陽一圈的時間(公轉週期)稱為「地球年」，下表為太陽系內地球與某行星的資料，則表中 T 的數值最接近下列哪一項？

行星	軌道平均半徑（百萬公里）	公轉週期（地球年）
地球	約 150	1
某行星	約 4500	T

(A) 1　(B) 30　(C) 50　(D) 100　(E) 160　[105 學測]

Ans: 8 .D　9.D　10.A　11. $F_g \propto \frac{1}{r}$　12. D　13.E

§7-2(1)地表的重力與重力加速度

本節學習重點

1. 萬有引力作用所及的空間稱為重力場,重力場強度可以用來表示重力場內各點的 特性。
2. 重力場強度的定義:單位質量的物體在某處所受的重力,稱為該位置的重力場強度。
3. 在重力場中，物體受重力作用，使其具有的加速度稱為重力加速度。
4. 若物體在靜止或等速運動時，其視重等於其真正的重量；若在加速度運動時，其視重不一定等於其真正的重量。
5. 赤道處的重力加速度比南北極的重力加速度略小，是因為地球自轉及地球並非正球體所造成，通常取重力加速度的平均值為 **9.80** 公尺／秒^2。

範例：

1. 若將地球視為均勻球體，請你試著從下列數據中找出有用的資訊，並算出地球的質量：地球半徑 $R=6400$ km、重力常數 $G=6.67\times10^{-11}$ m^3／（kg・s^2）、地表重力加速度 $g=9.8$ m／s^2、質量為 $m=50$ kg 的人其體重為 $W=50$ kgw。

重力 mg $\qquad \cancel{m}g=\dfrac{GM\cancel{m}}{R^2}$

萬有引力 $\dfrac{GMm}{R^2}$ $\qquad \Rightarrow M=\dfrac{gR^2}{G}=\dfrac{9.8\times(6.4\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}}$

$$=\frac{9.8\times6.4^2\times10^{12}}{6.67\times10^{-11}}=60\times10^{24}\text{(kg)}$$

$$\doteq 6\times10^{24}$$

2. 設地球為密度均勻的正球體，半徑為 R。以下為假設情況，請討論。
   (1)若地球的半徑減半，密度維持不變，則地球表面上的物體，其重量將如何改變？
   (2)若地球的半徑減半，質量維持不變，則地球表面上的物體，其重量將如何改變？

$F=\dfrac{GMm}{R^2}$, $M=\rho\times V=\rho\times\frac{4}{3}\pi R^3$

(1) $F=\dfrac{GMm}{R^2}$ $M\rightarrow(\frac{1}{8})$, $R^2\rightarrow(\frac{1}{2})^2$ $\Rightarrow F$ 變 $\frac{1}{2}$ 倍

(2) $F=\dfrac{GMm}{R^2}$ $M\rightarrow$ 不變, $R^2\rightarrow(\frac{1}{2})^2$ $\Rightarrow F$ 變 4 倍

3. 設地球為均勻分布的正球體，假設地球的半徑及密度皆減原有的一半，則在地球表面附近的下列各物體的運動情形將如何改變？

(1)在地表作斜向拋射的物體，當初速度的量值為一定時，物體的最大高度及水平射程。

(2)鉛直懸掛的理想彈簧下方，繫一重物而成平衡時彈簧的伸長量，及重物作簡諧運動時的週期。

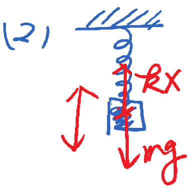
(3)擺長一定的單擺，在鉛直面上作小角度擺動時的週期。

$$g=\frac{GM}{R^2}\propto\frac{\rho\cdot R^3}{R^2}\propto\rho\cdot R\Rightarrow g'=\frac{1}{4}g$$

(1) $y_{max}=\frac{V_{oy}^2}{2g}\propto\frac{1}{g}\Rightarrow y_{max}$ 变4倍

$x_{max}=V_{ox}\times t=V_{ox}\times\frac{2V_{oy}}{g}\propto\frac{1}{g}\Rightarrow x_{max}$ 变4倍

(2)



① $kx=mg\Rightarrow x\propto g\Rightarrow x$ 变$\frac{1}{4}$倍

② $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 与g無関 ⇒ T不变

(3) 單擺 $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\propto\frac{1}{\sqrt{g}}\Rightarrow T$变2倍 ※

4. 已知地球半徑為 R，有一位置距離地球表面上高度為 h，h 遠小於 R，亦即 $h<<R$，請問該位置的重力場強度與地面的重力場強度 g 比較，結果會如何?

(A)少 $\frac{hg}{R}$ (B)多 $\frac{2hg}{R}$ (C)少 $\frac{2hg}{R}$ (D)多 $\frac{hg}{2R}$ (E)少 $\frac{hg}{2R}$

*$\boxed{\text{定义}}$：單位質量的物体所受的重力 ⇒ 重力場強度 g

$g=\frac{F}{m}$ (N/kg)

$g=\frac{\frac{GMm}{R^2}}{m}\Rightarrow g=\frac{GM}{R^2}$

$(1+0.001)^2\doteq1+0.002$

$(1-0.001)^{-\frac{1}{2}}\doteq1-(-\frac{1}{2})\times0.001\doteq1.0005$

*$\boxed{\text{近似}}$：$(1\pm x)^n\ \underline{\underline{x<<1}}\ 1\pm nx$

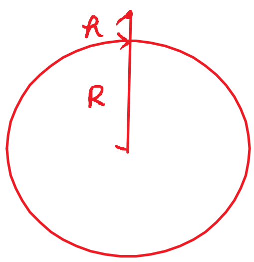
* $g'=\frac{GM}{(R+h)^2}$ $g=\frac{GM}{R^2}$

$g'=\frac{GM}{R^2(1+\frac{h}{R})^2}$ $h<<R$, $\frac{h}{R}<<1$

$g'=\frac{GM}{R^2}(1+\frac{h}{R})^{-2}$

$g'=g\left[1+(-2)\frac{h}{R}\right]$

$g'=g-g\times\frac{2h}{R}$ ※



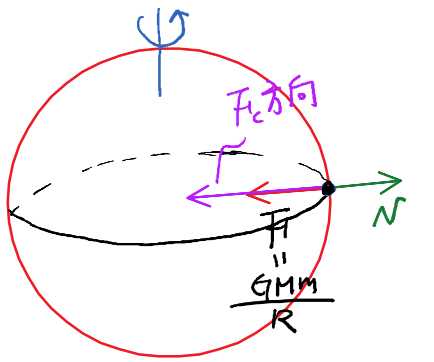
N　萬有引力

§7-2(2)地表的重力與重力加速度：視重與實重

範例：

地面給的正向力N

5. 地球的半徑為 R_e，地表的重力場強度量值為 g，請回答下列問題。
(1)若欲使赤道上某物體的視重為零，則地球自轉的週期應為何？
(2)將地球的半徑 $R_e = 6400$ km、地表的重力加速度量值 $g = 9.8$ m／s^2 代入(1)的結果，則地球自轉的週期應為若干分鐘？



(1) $F_c = F_引 - N \quad (N = F_引 - F_c)$，$N = 0$

$$\frac{4\pi^2 R_e m}{T^2} = \frac{GMm}{R_e^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 R_e}{T^2} = g \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}} \ \#$$

(2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{6400000}{9.8}}$　估算 → $2\pi \times 800$

$\doteq 5077\ (s)$

$= 85\ (m)$

＊太空船繞著地心等速圓周

$F_引 = F_c \Rightarrow N = 0$ 失重

6. 設 $\frac{GM}{R_e^2} = 9.8\,\text{m/s}^2$（$g$）。一質量為 60 公斤的人，在赤道上隨地球自轉，今用精密磅秤測量此人的體重，其讀數為若干公斤重？

$$F_c = \frac{GMm}{R^2} - N$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 R m}{T^2} = m \times 9.8 - N \qquad T = 1天$$

$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0.034$

$$\# \ \frac{4\pi^2 R}{T^2} = a_c$$

$$\Rightarrow a_c = \frac{4\pi^2 \times 6400000}{(86400)^2} = 0.034\ (m/s^2)$$

$$\Rightarrow N = 60 \times 9.8 - 60 \times 0.034 = 60(9.8 - 0.034) = 586\ (N) = 59.8\ (kgw)$$