

§7-3 行星與衛星的運動

$$* F_c = F_{g1} = \frac{GMm}{r^2} \quad * V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

本節學習重點

$$\frac{4\pi^2 r m}{T^2} = \frac{m v^2}{r} \rightarrow \text{軌道半徑}$$

1. 衛星環繞地球作等速圓周運動時，所受的重力即為向心力。
2. 以同一星球為力源的各衛星做圓周軌道運行時，其軌道週期的平方與軌道半徑的三次方成正比。
3. 地表衛星的軌道速率遠大於地球自轉赤道處的切向速率。
4. 同步衛星的公轉與地球的自轉同步，恆位於赤道正上空的某處，可以建立全球的通訊網系統。

範例：

軌道半徑 $r \doteq$ 地球半徑 R

1. 若人造衛星沿地表運行時的軌道週期為 T ，且重力常數為 G ，則地球的平均密度是否可由 G 和 T 求出？請說明理由。

$$\textcircled{1} \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\textcircled{2} F_c = F_{g1} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r m}{T^2} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow \frac{M}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GT^2} \Rightarrow \frac{M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GT^2}$$

$r=R$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \times \frac{4\pi^2}{GT^2} = \frac{3\pi}{GT^2} *$$

已知 地表衛星週期 \Rightarrow 算出地球密度

2. 若地球的質量為 M 、半徑為 R ，自轉週期為 T ，且重力常數為 G ，則地球同步衛星的軌道高度為多少？

軌道半徑 $r \Rightarrow r = R + h$

|| 地球自轉週期 T

$$F_c = F_{g1} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r m}{T^2} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow h = r - R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R *$$

3. 甲行星的質量是乙行星的 25 倍，兩衛星分別以半徑為 $R_甲$ 、 $R_乙$ 的圓軌道繞行甲、乙兩行星。若 $R_甲/R_乙 = 4$ ，則兩衛星分別繞行甲、乙兩行星的週期之比值 $T_甲/T_乙$ 為何？ [99 年指考]

(A) 6.25 (B) 2.5 (C) 1.6 (D) 0.4 (E) 0.16

$\times \frac{R^3}{T^2} = \text{定值}$ ，只適用於繞同一中心

$$M_甲 = 25M_乙$$

$$R_甲 = 4R_乙$$

$$F_c = F_{引} \Rightarrow \frac{4\lambda^2 r m}{T^2} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\lambda^2 r^3}{GM} \propto \frac{r^3}{M} \rightarrow \frac{4^3}{25} = \frac{r^3}{M}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_甲}{T_乙}\right)^2 = \frac{4^3}{25} \Rightarrow \frac{T_甲}{T_乙} = \frac{8}{5} = 1.6 \quad \#$$

4. 設有兩相距甚遠之恆星 A 與 B，其平均密度比為 $\rho_A : \rho_B = 1 : 2$ ，質量比為 $M_A : M_B = 4 : 1$ 。如果兩恆星旁各有一質量同為 m 的小行星分別以圓軌道繞 A 與 B 運動，假設繞行的軌道半徑相同，則

(1) 此兩恆星表面之重力加速度比 $g_A : g_B$ 為何？

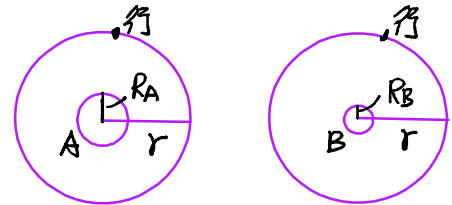
(2) 兩行星之週期比 $T_A : T_B$ 為何？ [90 年大學聯考]

$$(1) g = \frac{GM}{R^2}$$

$$* M = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 \propto \frac{M}{\rho} \rightarrow 4=1$$

$$\Rightarrow R_A^3 = R_B^3 = 8=1$$

$$\Rightarrow R_A = R_B = 2=1$$



$$\Rightarrow g \propto \frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{4}{2^2} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow g_A = g_B = 1=1 \quad \#$$

$$(2) \frac{4\lambda^2 r m}{T^2} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow T^2 \propto \frac{r^3}{M} \rightarrow \text{相同}$$

$$\Rightarrow T_A^2 = T_B^2 = \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow T_A = T_B = 1=2 \quad \#$$

5. 若質量不同的人造衛星在同一軌道上繞地球運行，衛星的軌道運行速率是否會不相同？為什麼？

$$F_c = F_{引} \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \propto \sqrt{\frac{M}{r}} \rightarrow \text{相同} \Rightarrow v \text{ 相同與 } m \text{ 無關} \quad \#$$

6. 學習過「行星與衛星的運動」的單元後，結合等速圓周運動及克卜勒第三定律的概念，請討論下列兩問題：

(1) 兩人造衛星各自在不同高度的圓軌道上環繞地球運行，其軌道半徑及軌道週期分別為 r_1 、 r_2 和 T_1 、 T_2 ，則此兩人造衛星的軌道週期平方與軌道半徑的立方能否成正比？

$$T^2 \propto r^3 ?$$

(2) 兩人造衛星在不同的圓軌道上分別環繞地球及月球運行，其軌道半徑及軌道週期分別為 r_1 、 r_2 和 T_1 、 T_2 ，則此兩人造衛星的軌道週期平方與軌道半徑的立方能否成正比？

$$T^2 \propto r^3 ?$$

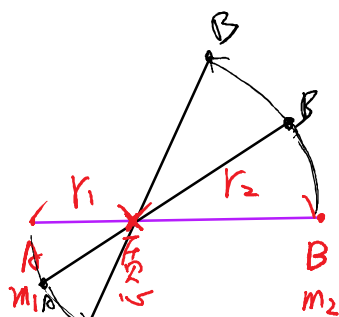
$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2 r m}{T^2} &= \frac{GMm}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} &= \frac{4\pi^2}{GM} \propto \frac{1}{M} \end{aligned}$$

(1) ∵ 繞行地球， M 相同
∴ $T^2 \propto r^3$

(2) ∵ 分別繞行地球和月球， M 不同
∴ T^2 與 r^3 不成正比

7. 遠離其他星系的兩星球 A、B 組成一雙星系統，其質量分別為 m_1 、 m_2 ，並維持連線距離 r 互繞運行，請回答下列問題。

- (1) 星球 A 的向心力的量值為何？
- (2) 星球 A 的向心加速度的量值為何？
- (3) 星球 A 的軌道速率為何？
- (4) 星球 A 的週期為何？



(1) $F_c = F_{31} = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$ → A 與 B 距離

(2) $a_c = \frac{F_c}{m_1} = \frac{Gm_2}{r^2}$

(3) $F_c = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$

* 軌道半徑 ≠ AB 距離 r

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{\frac{m_2}{m_1+m_2} r} = \frac{Gm_2}{r^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1+m_2)r}}$$

(4) $T_A = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi \times \frac{m_2}{m_1+m_2} r}{\sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1+m_2)r}}} = \dots = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(m_1+m_2)}}$

$$r_1 = r_2 = m_2 = m_1$$

$$* r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} r$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} r$$

8. 設在外太空中有某一獨立雙星系統，A 星球和 B 星球質量分別為 m 及 $2m$ ，兩者間的距離為 d ，如圖所示，若分別繞此系統的質量中心作等速圓周運動，請回答下列問題：
 $\omega_A = \omega_B = \omega \Rightarrow v_A = r_A \omega \quad v_B = r_B \omega, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$

(1) 兩者的軌道速率各為何？

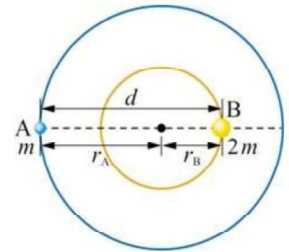
(2) 兩者的軌道週期各為何？

$$* F_c = m_A r_A \omega^2 = \frac{G M_A M_B}{d^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3Gm}{d^3}}$$

$$(1) v_A = r_A \omega = \frac{2}{3}d \times \sqrt{\frac{3Gm}{d^3}} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{Gm}{d}}$$

$$v_B = r_B \omega = \frac{1}{3}d \times \sqrt{\frac{3Gm}{d^3}} = \sqrt{\frac{Gm}{3d}}$$

$$(2) T_A = T_B = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3Gm}{d^3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{3Gm}}$$

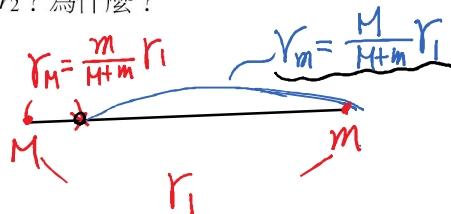


雙星系統的示意圖

$$r_A = r_B = 2:1$$

$$r_A = \frac{2}{3}d, \quad r_B = \frac{1}{3}d$$

9. 在地球上，我們可以觀察到月球及人造衛星都好像是在環繞地球作圓軌道運行。若已知月球的質量為 m_1 (m_1 與 M 相近)、人造衛星的質量為 m_2 ($m_2 \ll M$)、地球的質量為 M ，且月球與地球間的距離為 r_1 、人造衛星與地球間的距離為 r_2 ，你認為月球及人造衛星環繞地球運行時，其軌道半徑是否分別為 r_1 及 r_2 ？為什麼？



$$r_m = \frac{M}{M+m} r_1$$

① 若是月球 $m \approx \frac{1}{81}M$

$$r_m = \frac{M}{\frac{81}{81} + M} r_1 = \frac{81}{81} r_1 \neq r_1$$

距離

② 若是人造衛星 $m \ll M$

$$7-16 \quad r_m = \frac{M}{M+m} r_2 \approx r_2$$

10. 假設有三顆恆星的質量皆為 m ，且相距皆為 L ，三顆恆星繞此恆星系統的質心作等速圓周運動，請討論此三恆星互繞的問題。

(1) 各恆星的運轉速率為何？ $v_A = v_B = v_C = v$

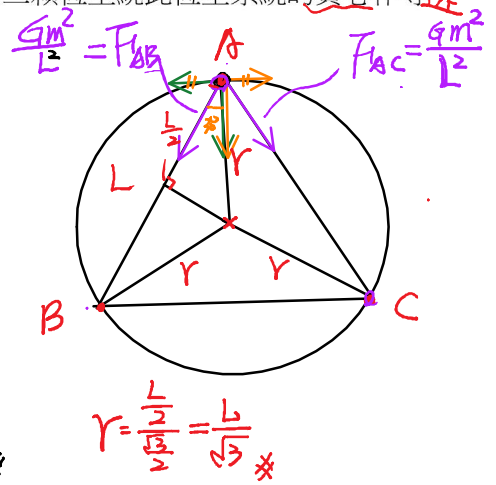
(2) 各恆星的運轉週期為何？ $T_A = T_B = T_C = T$

(1) $F_c = F_{\text{引}}$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm^2}{L^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2$$

$$\frac{mv^2}{\frac{L}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}Gm^2}{L^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{L}} \quad *$$

(2) $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times \frac{L}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{GM}{L}}} = 2\pi L \sqrt{\frac{L}{3GM}} \quad *$



11. 將萬有引力常數當作已知，則從下面哪些選項中的兩個數據，就可以估計出地球的質量？

【96 指考】

(A) 地球與同步衛星間的距離 R ，地球的自轉周期 T

(B) 人造衛星的運動速率 v ，人造衛星的周期 T

(C) 人造衛星與地球間的距離 R ，人造衛星的周期 T

(D) 地球繞太陽運轉的周期，地球與太陽間的距離 $\Rightarrow M_{\text{太陽}}$

(E) 月球繞地球運轉的周期 T ，月球與地球間的距離 R

$$\frac{4\pi^2 Rm}{T^2} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \quad \text{已知 } R, T \Rightarrow \text{可得 } M$$

(B) $M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \rightarrow \frac{4\pi^2 \left(\frac{vT}{2\pi}\right)^3}{GT^2}$

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

v, T, R

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$R = \frac{vT}{2\pi}$$

12. 甲、乙兩顆人造衛星分別以不同半徑繞地球作等速圓周運動，若甲為同步衛星，且其軌道半徑較乙衛星的軌道半徑大，則下列有關甲、乙兩衛星的敘述何者正確？

- (A) 甲衛星繞地球的速率較大
 (B) 甲衛星繞地球的向心加速度量值較大
 (C) 甲衛星繞行地球的週期和地球的自轉週期相同
 (D) 甲衛星與地心連線在單位時間內掃過的面積較大
 (E) 甲、乙兩衛星分別與地心連線在單位時間內掃過相同面積

$$R_{甲} > R_{乙}$$

$$T_{甲} > T_{乙}$$

$$\parallel$$

$$1 \text{ 天}$$

【105 年指考題】

(A) $v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \propto \frac{1}{\sqrt{R}}, R_{甲} > R_{乙} \Rightarrow v_{甲} < v_{乙}$

(B) $a_c = g = \frac{GM}{R^2} \propto \frac{1}{R^2}, R_{甲} > R_{乙} \Rightarrow a_{c甲} < a_{c乙}$

(D) $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{2R^2}{T}, R^3 \propto T^2 \Rightarrow T \propto R^{\frac{3}{2}}$

(E) $\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} \propto \frac{R^2}{R^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} \propto R^{\frac{1}{2}}, \therefore R_{甲} > R_{乙} \Rightarrow \left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_{甲} > \left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_{乙}$

實力養成：

1. 一顆人造衛星在地球表面上高度為 R 的圓周軌道上運行 (R 為地球半徑)。若果在此高度上的重力加速度為 a ，則此人造衛星的速率為何？請以 R 與 a 表示答案。

[大學聯考試題]

2. 假設有一顆極靠近地球表面運轉的衛星的週期為 T ，地球半徑為 R ，地面重力場強度為 g ，下列哪幾項敘述正確？

(A) 該衛星的週期為 $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (B) 該衛星的速率為 \sqrt{gR} (C) 該衛星的加速度為 g

(D) 地球的質量為 $\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$ (E) 地球的平均密度為 $\frac{3\pi}{GT^2}$ 。

3. 若 R 為地球半徑，今有一人造衛星其質量為 M ，在距離地球表面為 R 的圓形軌道上運轉，如其所受向心力為 F ，則此衛星的速率為何？

(A) $\sqrt{\frac{FR}{2M}}$ (B) $\sqrt{\frac{2MR}{F}}$ (C) $\sqrt{\frac{2RF}{M}}$ (D) $\sqrt{\frac{M}{2FR}}$ (E) $\sqrt{\frac{FR}{M}}$