7-3 行星與人造衛星

1.行星（等速圓周運動

利用克卜勒之行星週期定律式（7.2），可知行星運轉的軌道半徑 R 與週期 T 有嚴格的比例關係，即

$R^3 \propto T^2$

(1) T與R

$\frac{GMm}{R^2}=\frac{4\pi^2 Rm}{T^2}$

$$T=\frac{1}{\sqrt{K}}R^{\frac{3}{2}} \quad 或 \quad R=\sqrt[3]{K}\,T^{\frac{2}{3}} \quad (7.9)$$

$R \propto T^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \frac{R^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$ ⇒ R固定 ⇒ T固定

R

而作圓周運動行星的速率 $v=\frac{2\pi R}{T}$，因此可與上式結合，得到

(2) v與R

$\frac{GM\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}}=\frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{R}}$

$$v=(2\pi\sqrt{K})\frac{1}{\sqrt{R}}\propto\frac{1}{\sqrt{R}} \quad 7.10$$

$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$ ⇒ $v\propto\sqrt{M}$

$v\propto\frac{1}{\sqrt{R}}$，v與m無關

或

(3) v與T

$v=\frac{2\pi R}{T}\propto\frac{T^{\frac{2}{3}}}{T}$

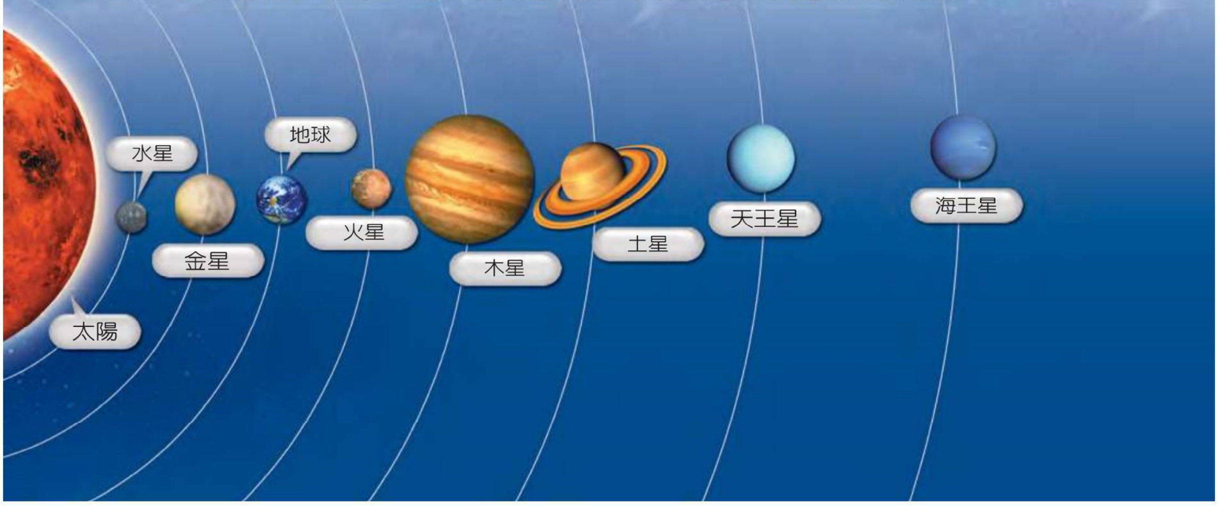
$$v=(2\pi\sqrt[3]{K})\frac{1}{\sqrt[3]{T}}\propto\frac{1}{\sqrt[3]{T}} \quad 7.11$$

$\Rightarrow v\propto T^{-\frac{1}{3}}$

亦即行星運動速率與軌道半徑的平方根成反比，或與週期的立方根成反比（另參考範例 7-7）。所以如果知道各個行星的軌道半徑 R，便可明白它們所對應的運動週期 T，也可知道每顆行星的運動速率 v，這是行星運動的一個特徵（圖 7-5，表 7-2）。

與m無關

圖 7-5　太陽系的各個行星，有不同的軌道半徑，而有相對應不同的週期與速率關係。



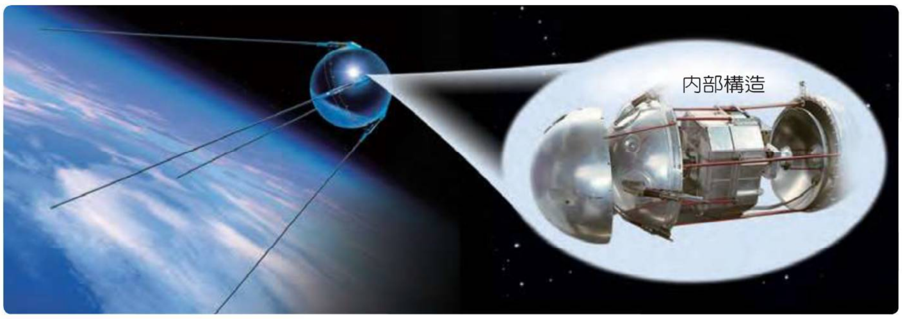
▼ 表 7-2　太陽系八大行星運行軌道的主要觀測數據；最後一列數據是以地球為參考標準所得之其他行星運轉速率──與 $\frac{1}{\sqrt{R}}$ 成正比──的理論值，可知其與觀測值非常吻合。

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	
與太陽平均距離 R（天文單位）	0.387	0.723	1	1.52	5.20	9.54	19.2	30.1	大
公轉週期 T（年）	0.241	0.615	1	1.88	11.9	29.5	84.0	165	大
平均速率 $v=\frac{2\pi R}{T}$（公里／秒）	47.9	35.0	29.8	24.1	13.1	9.64	6.81	5.43	小
理論值 $\frac{29.8}{\sqrt{R}}$	47.9	35.0	29.8	24.2	13.1	9.65	6.80	5.43	

2. 人造衛星 — ①牛頓，②軌道面：过地心 ③同步衛星 赤道面

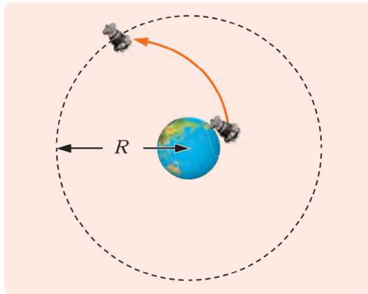
第一顆人造衛星（artificial satellite）史波尼克一號（Sputnik Ⅰ）是由前蘇聯於 1957 年 10 月 4 日發射之後（圖 7-6），開啟了人對宇宙探索的新紀元，自此之後人類進入了人造衛星的時代，發展至今，人造衛星扮演著決定人類社會發展重要的因素，無形之中，人造衛星對人類生活幾乎有著無遠弗界的影響，例如：手機跨國的漫遊、國與國之間的軍事競賽、在氣象預測與資源探測、⋯⋯等。

2017



▲ 圖 7-6　史波尼克一號衛星。

人造衛星由地表發射後，若在距離地心為 R 處時，衛星的速度剛好等於衛星在該處作等速圓周運動運轉時所需的切向速度，則衛星便可藉地球所施予的萬有引力，讓自身穩定地環繞地球運動，而不需再靠所攜帶的推動力（圖 7-7）。

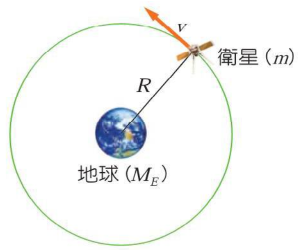


▲ 圖 7-7　人造衛星由地表發射，剛好到 R 軌道半徑，配合適當的速率 v，便可作繞地運動，不需任何動力。

如果衛星繞著地球運轉的軌跡是一圓形，由於衛星的質量 m 遠小於地球的質量 M_E（$m \ll M_E$），因此圓心即為地心的位置。

在翰林版基礎物理㈡ B 上冊第 5 章學過，作等速圓周運動的物體一定受到向心力的作用，其量值由牛頓第二運動定律及式（7.1）知

$$F_c = ma = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad 7.12$$



▲ 圖 7-8　衛星（m）繞著地球（M_E）作圓周運動的半徑（R），即為衛星與地心的距離。

其中 m 為衛星的質量，R 為圓周運動的半徑（即衛星與地心間的距離），v 為衛星的速率（圖 7-8）。而使衛星產生圓周運動所需的向心力 F_c，來自於衛星與地球間之萬有引力，由萬有引力定律式（7.5），可得

(1) $F_c = F_{引}$

$$\frac{GM_E m}{R^2} = F_c = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad (7.13)$$

因此

$$\Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_E}{4\pi^2} = K' \qquad 7.14$$

與 M_E 有關，與 m 無關

** $M_E = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$，⇒ 測 R, T 可得 M_E

*地球自轉速率（赤道）
$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\times 6400000}{86400} = 465\ m/s$

(2) $\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \propto \sqrt{\frac{M}{R}}$

(3) 地表衛星（$h \ll R_E$, $R \doteq R_E$），$h \doteq 200\ km$ ok!

① $v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R}} = \sqrt{g_0R} = 7900\ m/s = 7.9\ km/s$

*地表 $g_0 = \frac{GM}{R^2}$
$\Rightarrow GM = g_0R^2$

1st 宇宙速度：在地表繞地作等速圓周運動

② $T = \frac{2\pi R}{v} = 5080\ (s)$

② $T=\frac{2\pi R}{v}=5070\ (s)$
$\fallingdotseq 85\ (min)$

1st 宇宙速度：在地表繞地作等速圓周運動的速率

由式（7.14）可知，衛星至地球距離 R 的三次方與衛星繞地球公轉週期 T 的平方之比值，只與地球的質量 M_E 有關，而跟衛星的質量 m 無關。因此，衛星繞地與行星繞日的情形完全類似，遵循一樣的週期關係式，只是比值 K' 與行星系統的 K 不同。而衛星速率 v 與軌道半徑 R 與週期 T 的關係，仍如式（7.10）與（7.11）所示，與行星繞日所對應關係相同。我們還可以從任一顆衛星與地心的距離 R、及衛星的週期 T，根據式（7.14）而推算出地球的質量 M_E。

實際上，人造衛星的高度一般都須離地表幾百公里以上，這是為了避免受到地球大氣層的摩擦力作用，因為如果摩擦力不斷作用，造成衛星減速，最終會掉回地面，所以在設計人造衛星仍要考慮一些實際的問題。

(4) 同步衛星

有一種為特殊功能和目的所設計出的人造衛星為地球同步衛星（圖 7-9），它可使人造衛星繞行的角速度 ω 與地球自轉的角速度一樣，週期也一樣，即從地面的赤道上看來，覺得衛星好像一直停留在空中不動，此即是「同步」的意義。由於運轉週期固定，由式（7.9）與式（7.11）可知地球同步衛星的高度與速率也必為一特定值。通訊和部分氣象用的人造衛星都是屬於地球同步衛星，人造衛星與人類社會的發展已緊密的結合在一起。

$*\ GM=g_0R_E^2$

① 週期 $T=86400\,s$

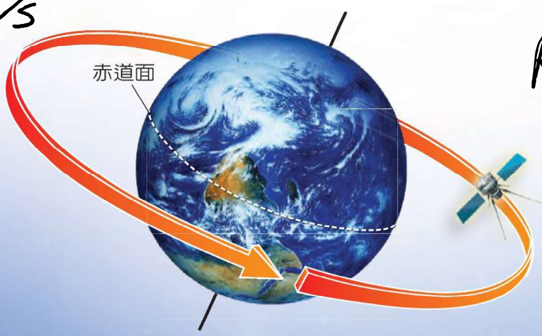
② $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{86400}\ rad/s$

③ 高度？

ⓐ $\frac{GMm}{R^2}=\frac{4\pi^2Rm}{T^2}$

$\Rightarrow R^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$

$=\frac{g_0R_E^2T^2}{4\pi^2}$



▲ 圖 7-9　離地表高度 35.9×10^6 m 的地球同步衛星之環繞地球速率為 3.07×10^3 m / s。

$\Rightarrow R=4.23\times10^7\ m$
$=42300\ km$

高度 $h=R-R_E$
$=35900\,km$

ⓑ $\left(\frac{R^3}{T^2}\right)_{同}=\left(\frac{R^3}{T^2}\right)_{月}$

$\Rightarrow \frac{R^3}{1^2}=\frac{380000^3\ km}{(27.3)^2\ 天}$

$\Rightarrow R=4.2\times10^4\ km$

$R_{月地}=380000\,km$

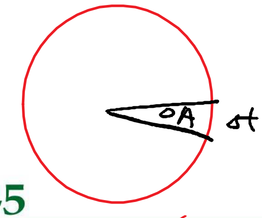
④ 速率

ⓐ $\frac{mv^2}{R}=\frac{GMm}{R^2}$

$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$

ⓑ $v=\frac{2\pi R}{T}$

$\Rightarrow v\fallingdotseq 3.07\times10^3\ m/s$
$\fallingdotseq 3\ km/s$



$$\frac{GM\cancel{m}}{r^2}=\frac{4\pi^2 r\cancel{m}}{T^2}$$

$$\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

範例 7-5

若設人造衛星以半徑 r 繞地心作圓形軌道運動，令地球的質量為 M，重力常數為 G，則人造衛星與地心的連線，在單位時間內所掃過的面積為何？

【相關練習：習題 9.、10.】
【98.指考】

① $$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\pi r^2}{T}=\frac{\pi r^2}{\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}}=\sqrt{\frac{\pi^2 r^4}{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}}=\sqrt{\frac{GMr}{4}}$$

復習

② $$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}rv\sin\theta=\frac{1}{2}rv=\frac{1}{2}r\times\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{GMr}{4}}$$

概念

1. 人造衛星的公轉半徑與公轉週期的關係式：
$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}。$$
2. 單位時間內所掃過的面積 $=\dfrac{\text{掃過的圓面積}}{\text{週期}}$。

策略

1. 利用人造衛星的公轉半徑 r 與地球的質量，求出衛星的公轉週期 T。
2. 單位時間所掃過的面積
$$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\pi r^2}{T}。$$

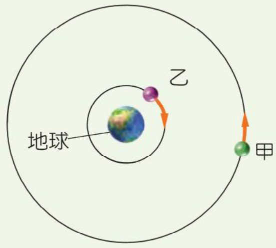
解

由衛星的週期定律：
$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

因此衛星在單位時間內所掃過的面積：
$$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\pi r^2}{T}=\frac{\pi r^2}{\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}}=\sqrt{\frac{GMr}{4}}$$

範例 7-6

如右圖所示，甲、乙兩人造衛星以圓形軌道繞地球運轉，假設運行的軌道在同一平面上，且運行的方向相反。甲衛星發現每隔 $\frac{1}{9}$ 週期會與乙衛星相遇（即甲、乙兩衛星與地球恰在一直線上且在地球同側），若忽略甲、乙兩衛星間的作用力，則甲、乙兩衛星軌道半徑之比為何？



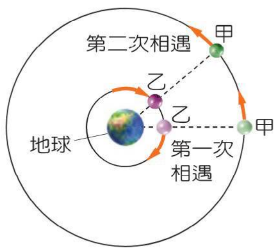
【相關練習：習題 10.、11.】

(A) 1：4　(B) 1：2　(C) 1：1　(D) 2：1　(E) 4：1。　【98.指考】

概念　人造衛星遵循週期定律：$\frac{R^3}{T^2}=$常數。

策略　1. 衛星繞地球一圈需一週期，則 $\frac{1}{9}$ 週期後衛星將繞地球 $\frac{1}{9}$ 圈。

2. 若 $T_甲$、$T_乙$ 為甲、乙兩人造衛星之週期，如右圖，當甲、乙兩衛星自第一次相遇到第二次相遇時，因甲衛星經過 $\frac{1}{9}T_甲$、繞地球 $\frac{1}{9}$ 圈，而乙衛星將繞地球 $\frac{8}{9}$ 圈、經過 $\frac{8}{9}T_乙$。



3. 引用週期定律：$\frac{{R_甲}^3}{{T_甲}^2}=\frac{{R_乙}^3}{{T_乙}^2}$ ⇨ $\frac{R_甲}{R_乙}=(\frac{T_甲}{T_乙})^{\frac{2}{3}}$。

解　甲、乙兩衛星相遇時所經過的時間相同，且 $\frac{1}{9}T_甲=\frac{8}{9}T_乙$ ⇨ $\frac{T_甲}{T_乙}=\frac{8}{1}$

由週期定律：$\frac{R_甲}{R_乙}=(\frac{T_甲}{T_乙})^{\frac{2}{3}}=(\frac{8}{1})^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{1}$

故選(E)。

R⇒v= ⇒T

① $v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$ $\frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{R}}=\frac{GM\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}}\Rightarrow R=\frac{GM}{v^2}$ #

② $T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\times\frac{GM}{v^2}}{v}=$

範例 7-7

在完成登月任務後，登月艇自月球表面升空與母船會合。母船與登月艇會合後一起繞月球作圓周運動，其速率為 v，母船與登月艇（船艇）的總質量為 m，月球的質量為 M，重力常數為 G，求母船與登月艇繞月球軌道運動的軌道半徑 R 與週期 T。【相關練習：習題 12.】

概念 1. 萬有引力定律：$F=\frac{GMm}{R^2}$。

2. 圓周運動的向心力：$F_c=m\frac{v^2}{R}$。

3. 圓周運動之速率 $v=\frac{2\pi R}{T}$。

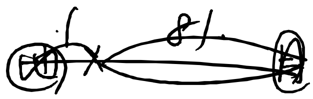
策略 1. 設母船與登月艇（船艇）的軌道半徑為 R、週期為 T。

2. 船艇繞月球運動所需的向心力，由月球與船艇之間的萬有引力提供。

3. 利用 R、T 之間的關係式 $v=\frac{2\pi R}{T}$，求得 T。

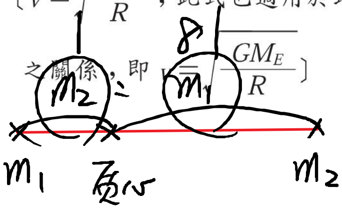
解 $m\frac{v^2}{R}=\frac{GMm}{R^2}$ ⇨ 半徑 $R=\frac{GM}{v^2}$

週期 $T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi GM}{v^3}$



應用 船艇繞月球運動的速率 v，與至月球中心距離 R 及月球質量 M，有何關係？

〔$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$，此式也適用於地球上之人造衛星速率 v，與距地心距離 R 之關係，即 $v=\sqrt{\frac{GM_E}{R}}$〕



$M_月\simeq10^6 M_地$

$M_地\doteqdot 81 M_月$

$380000\times\frac{1}{82}=4634\,km$

3. 双星系統

行星繞日運動時，因行星質量遠小於太陽質量，使得太陽雖也受行星的萬有引力吸引，但因其質量太大，以致於加速度小到無法察覺，而太陽會幾乎靜止不動；人造衛星繞地球運轉也具有相同的情形，對衛星而言，地球幾乎維持不動。

但是如果兩個星球的質量接近，此時兩個星球都會受到彼此的引力，而產

① ω, T 相同

② $r_1 : r_2 = m_2 : m_1$，$r_1 + r_2 = d$ $\Rightarrow$ $r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}d$，$r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}d$

③ $v = r\omega \Rightarrow v \propto r \propto \frac{1}{m}$

④ 向心力 $F_c = F_{引} = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ 相同

⑤ $a_c = \frac{F_c}{m} \propto \frac{1}{m}$

生可觀察到的加速度。此時兩個星球將會繞著共同的質心，以各自的半徑作相同週期的圓周運動，而形成所謂的雙星系統。兩星球圓周運動的半徑並非是兩個星球間的距離，而是各個星球到共同質心的距離（圖 7-10）。

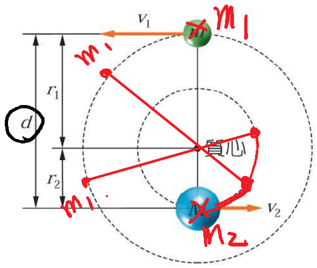


圖 7-10　兩個質量接近的星球因彼此吸引所作的圓周運動。各自以不同速率及不同半徑，但相同之週期旋轉。

⑥ m_1：$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \Rightarrow v_1 =$

m_2：$\frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \Rightarrow v_2 =$

軌道半徑 $r_1 \neq r_2 \neq$ 距離 d　m_1, m_2

範例 7-8

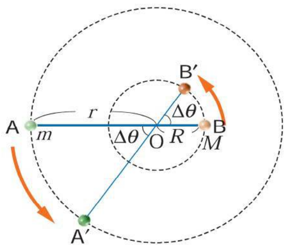
一系統由可視為質點的兩星球組成，其質量分別為 m 與 M（$M > m$），在彼此間的重力作用下，分別以半徑 r 與 R 繞系統的質心 O 作圓周運動。若質心 O 靜止不動，求兩星球之：(1)速率比；(2)週期比。

(1) $v = r\omega \Rightarrow v \propto r \propto \frac{1}{m}$

1:1

概念

1. 圓周運動之速率 v 與角速率 ω 的關係：$v = r\omega$。
2. 圓周運動之週期 T 與角速率 ω 的關係：$T = \frac{2\pi}{\omega}$。
3. 如右圖，質心 O 靜止不動，當質量為 m 的星球由 A 轉至 A′ 時，質量為 M 的星球必由 B 轉至 B′。兩星球的角移量值 $\Delta\theta$ 相等，故角速率 ω 也會相等。



策略

1. 設兩星球角速率為 ω，速率各為 v_1、v_2，週期各為 T_1、T_2。
2. 寫下速率比關係式。
3. 寫下週期比關係式。
4. 兩星球之角速率 ω 恆等。

解

(1) 兩星球之速率比 $v_1 : v_2 = r\omega : R\omega = r : R$

(2) 兩星球之週期比 $T_1 : T_2 = \frac{2\pi}{\omega} : \frac{2\pi}{\omega} = 1 : 1$

應用

求兩星球的加速度量值之比。

〔$a_1 : a_2 = \frac{v_1^2}{r} : \frac{v_2^2}{R} = \frac{r^2}{r} : \frac{R^2}{R} = r : R$ 或 $a_1 : a_2 = r\omega^2 : R\omega^2 = r : R$〕