

Ans: 17.ACE 18.AB

§9-4 重力位能的普遍(一般)形式與力學能守恆律

單元學習目標

高中力學的單元談到位能，包括「重力位能」和「彈性能」。地球表面附近的重力位能 $U = mgh$ ，大家比較耳熟能詳，但重力位能的普遍形式

$U = -\frac{GMm}{r}$ ，會較生疏，也覺得不好懂，上課和學習時務必專注，才能融會貫通及釐清

概念：

※ 萬有引力或重力屬於一種保守力，所對應的位能為

$U_{\text{萬有引力}}(r) = -\frac{GMm}{r}$ ，此時重要的前提是「定無限遠處的重力位能為零」。

範例：

1. 已知地球的半徑為 $6.40 \times 10^6 \text{ m}$ ，質量為 $6.00 \times 10^{24} \text{ kg}$ ，重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 。今有一質量為 100 kg 的人造衛星，距地表高度為 $2.00 \times 10^6 \text{ m}$ 。若定無限遠處的位能為零，請問人造衛星在地球重力作用下的位能約為多少？若改設地表為重力位能的零位面，則人造衛星的重力位能約為何？

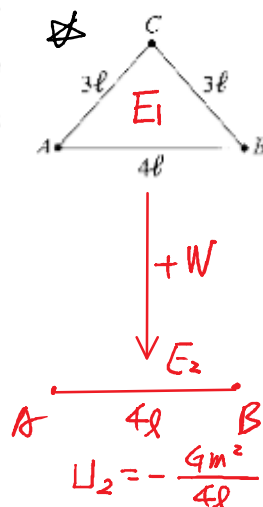
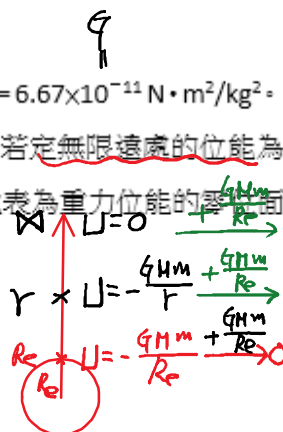
$$(1) U = -\frac{GMm}{r} \rightarrow \frac{6.4 \times 10^6 + 2.0 \times 10^6}{100} = 8.4 \times 10^6$$

$$(2) U = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{R_e}$$

2. 外太空中有質量均為 m 的三星球 A、B、C 形成的系統，其分佈如圖所示。(1) 系統的重力位能為？(2) 若在 A、B 星球固定不動的情況下，欲使星球 C 脫離此系統至無窮遠處，則至少需提供多少能量？ $U_{\infty} = 0$

$$(1) U = U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} \\ = \left(-\frac{Gm^2}{4l}\right) + \left(-\frac{Gm^2}{3l}\right) + \left(-\frac{Gm^2}{3l}\right) \\ = -\frac{11}{12} \frac{Gm^2}{l} \quad \dots U_1$$

$$(2) W = E_2 - E_1 = U_2 - U_1 = \left(-\frac{Gm^2}{4l}\right) - \left(-\frac{11}{12} \frac{Gm^2}{l}\right) \\ (E_1 + W = E_2) \quad 9-25 = \frac{2}{3} \frac{Gm^2}{l}$$



3. 一人造衛星環繞地球軌道作圓運動，若受到稀薄空氣阻力的作用，則關於此人造衛星的物理量，下列哪些會增加？

(A) 軌道半徑 (B) 動能 (C) 重力位能 (D) 力學能 (E) 加速度的量值

* $W_{非} < 0$

* $a \leftarrow F$

r $\frac{GMm}{2r}$ $-\frac{GMm}{r}$ $-\frac{GMm}{2r}$ $\frac{GM}{r^2}$

* $W_{非} = \Delta E$

$W_{非} < 0 \Rightarrow \Delta E < 0 \Rightarrow E$ 減少

(D) $E = -\left(\frac{GMm}{2r}\right)$ 減少 $\Rightarrow r$ 減少

(B) $K = \frac{GMm}{2r} \Rightarrow K \uparrow$

(C) $U = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow U \downarrow$

(E) $a = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow a \uparrow$

4. 如圖所示，地表的重力場強度為 g ，地球半徑為 R ，一顆質量為 m 的人造衛星環繞地球做半徑為 $2R$ 的圓軌道運動。請以 g 、 R 及 m 等符號回答下列問題：

$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2$

(1) 人造衛星的動能為何？

(2) 欲使人造衛星軌道半徑變成 $3R$ ，須提供多少能量？ $E = -\frac{GMm}{2r}$

(3) 欲使人造衛星由軌道半徑 $3R$ 脫離地球重力場，其最小速度為何？ gR^2

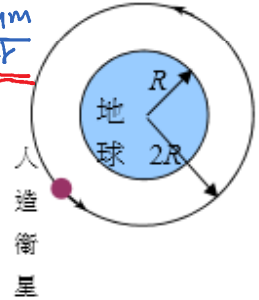
(1) $\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow K = \frac{GMm}{2r} = \frac{1}{4} \frac{GMm}{R} = \frac{1}{4} mgR$

(2) $E(2R) + W = E(3R)$

$\Rightarrow -\frac{GMm}{2(2R)} + W = -\frac{GMm}{2(3R)} \Rightarrow W = \frac{1}{12} \frac{GMm}{R} = \frac{1}{12} mgR$

(3) $E'(3R) \geq 0$

$\Rightarrow -\frac{GMm}{3R} + \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{2GM}{3R}} \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{2}{3}} gR$



5. 地球半徑 R ，在地面上發射一人造衛星，使其在距離地表 $2R$ 處環繞地球作等速率圓周運動，且動能為 K ，定無窮遠處的重力位能為零。回答下列問題：

(1) 在地面上發射該人造衛星時所提供的能量為多少？

(2) 今人造衛星損失了能量 $\frac{1}{2}K$ 後仍能作等速率圓周運動，軌道半徑將變為若干？

(1) $r=R \xrightarrow{+W} 3R$

$E(R) + W = E(3R) = U + K$

$-\frac{GMm}{R} + W = -\frac{GMm}{2(3R)} + K$

$\Rightarrow W = \frac{5}{6} \frac{GMm}{R} = 5K$

$K = \frac{GMm}{2(3R)} = \frac{GMm}{6R}$

(2) $E_2 = E_1 - \frac{1}{2}K$

$= -\frac{GMm}{2(3R)} - \frac{1}{2} \frac{GMm}{6R}$

$E_2 = -\frac{3}{4} \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2r}$

$\Rightarrow r = 2R$

新軌道半徑

6. 已知水平拋射的物體初速愈大，射程也愈遠，如果初速度夠大，因為地球為球形，物體將不會落地，而能繞著地球作等速率圓周運動，這就是人造衛星的初步想法。已知地表的重力加速度為 g ，地球半徑為 R ，忽略空氣阻力的影響，且定無窮遠處的重力位能為零，今將一質量為 m 的物體在離地心為 R 的地表附近以速率 v 水平發射時，物體恰能在地表上空環繞著地球作等速率圓周運動，下列敘述哪些正確。

(A) 該物體在地表作等速率圓周運動時的力學能為 $\frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mU^2 + (-\frac{GMm}{R})$

(B) 在地表將物體改以速率 v 鉛直向上發射時，物體上升的最大高度為 $\frac{v^2}{2g} \rightarrow \frac{\frac{GM}{R}}{2 \times \frac{GM}{R^2}} = \frac{R}{2}$

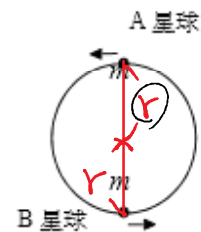
(C) 在地表將物體改以速率 v 鉛直向上發射時，物體上升的最大高度為 R

(D) 欲使物體脫離地球的重力場，物體在地表發射時的速率至少為 $\sqrt{2}v$

(E) 欲使物體脫離地球的重力場，物體在地表發射時的速率至少為 $2v$

(B) 只受動作用， E 守恆 (D) $E(R) \geq 0$
 (C) $E_1 = E_2$ (E) $-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mU^2 \geq 0$
 $E_1 = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mU^2 = -\frac{GMm}{R}$
 $\Rightarrow -\frac{Rv^2}{R} + \frac{1}{2}U^2 = -\frac{Rv^2}{R}$
 $\Rightarrow \frac{Rv^2}{R} = \frac{1}{2}U^2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}U \Rightarrow U = 2v \Rightarrow R = R - R = R$

7. G 為重力常數，以無限遠處為位能零點。今有質量均為 m 的 A、B 二星球，在相互吸引的重力作用下同時以半徑 r 對此二星球的質量中心作等速率圓周運動，如圖所示。請以 $G、m、r$ 等符號回答下列問題：



(1) 二星球系統的重力位能為多少？

(2) A 星球的動能為多少？

(3) 若欲將 A、B 二星球拆散成相距無限遠，則至少須提供多少能量？

(1) $U = -\frac{GMm}{(2r)}$ → 距離

(2) $F_c = \frac{mU^2}{r} = \frac{GMm}{(2r)^2}$
 半徑 → 距離

$K = \frac{1}{2}mU^2 = \frac{1}{2}r \times \frac{GMm}{4r^2}$
 $= \frac{GMm}{8r}$... A 之動能

(3) $E_i + W \geq 0$

$U + K_A + K_B + W \geq 0$

$\Rightarrow -\frac{GMm}{2r} + \frac{GMm}{8r} + \frac{GMm}{8r} + W \geq 0$

$\Rightarrow W \geq \frac{GMm}{4r}$ *
 1/4 Mm

8. 一人造衛星的質量為 m ，以橢圓軌道繞地球運行。衛星離地心最近的距離為 R ，離地心最遠的距離為 $4R$ 。設地球之質量為 M ，重力常數為 G ，請回答下列問題：

(1) 衛星在離地心最近處（近地點）和最遠處（遠地點）的動能比為 16:1。

(2) 衛星在離地心最近處和最遠處的動能差為 $\frac{3}{4} \frac{GMm}{R}$ 。

(3) 該衛星由近地點運行至遠地點的期間內，地球引力對衛星作功為 $-\frac{3}{4} \frac{GMm}{R}$ 。

(4) 該衛星在軌道上的力學能為 $U_1 = \frac{GMm}{R}$ 。

(5) 該衛星在離地心最近處（近地點）的速率為 $v_1 = \sqrt{\frac{8GM}{5R}}$ 。

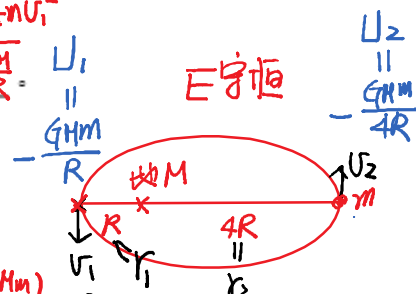
(1) $U_1 r_1 = U_2 r_2 \Rightarrow U_1 = U_2 = r_2 = r_1 = 4:1$
 $\Rightarrow K_1 = K_2 = 16:1$

(2) $E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$\Rightarrow K_1 - K_2 = U_2 - U_1 = \left(-\frac{GMm}{4R}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$
 $= \frac{3}{4} \frac{GMm}{R}$

(3) $W = -\Delta U = -(U_2 - U_1)$
 $= -\frac{3}{4} \frac{GMm}{R}$

實力養成：或 $W_{\text{功}} = \Delta K = K_2 - K_1 = -\frac{3}{4} \frac{GMm}{R}$



(4) 近地點 $K_1 \Rightarrow$ 遠地點 $\frac{1}{16} K_1$

$\Rightarrow K_1 - K_2 = \frac{3}{4} \frac{GMm}{R}$

$\Rightarrow \frac{5}{4} \frac{15}{16} K_1 = \frac{3}{4} \frac{GMm}{R} \Rightarrow K_1 = \frac{4GMm}{5R}$

(5) $E = K_1 + U_1 = \frac{4}{5} \frac{GMm}{R} + \left(-\frac{GMm}{R}\right)$
 $= -\frac{GMm}{5R}$

1. 已知地球質量為 6.0×10^{24} kg，半徑為 6.4×10^6 m。重力常數 $G = 6.7 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²。今有一直徑大約為 100 m、質量為 2.0×10^9 kg 的隕石從一動能可忽略的極遠處，受地球引力作用而朝地球撞擊。請問當隕石撞擊到地球後大約會釋放出多少焦耳的能量？隕石撞擊地球的速度約為多少？【引導：地球引力對物體所作的功為正功，其值為隕石初位能與末位能的差。質量為 m 的物體在地球外距地心 r 處，位能為 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ 。】

2. 忽略空氣阻力的影響，設地球半徑為 R ，供給一太空船 W 的動能，可將它從地面送至離地面 R 的高度而靜止。若欲讓此太空船在該高度繞地心作圓周運動，則太空船在地球上時，應供給多少動能？ (A) $\frac{3}{2}W$ (B) $\frac{1}{2}W$ (C) W (D) $2W$ (E) $3W$

3. 上題中，若欲使在圓軌道環繞地球運行的太空船脫離地球，須再補充多少能量？ (A) $2W$ (B) W (C) $\frac{3}{8}W$ (D) $\frac{3}{4}W$ (E) $\frac{1}{2}W$